ЗА КОМПЛЕКСНИТЕ ПОЛИНОМИ ОРТОГОНАЛНИ НА КРУЖЕН ЛАК

Боро Пиперевски
Електротехнички факултет, Скопје, e_mail: borom@etf.ukim.edu.mk ,

Апстракт:

Се покажува дека некои поткласи комплексни полиноми ортогонални на кружен лак во однос на скаларен производ кој не е позитивно дефинитен, дефинирани и проучувани од W. Gautschi., G.V.Milovanovic и M.G. de Bruin , се решенија на линеарна диференцијална равенка од втор ред со полиномни коефициенти која може да се сведе на систем линеарни диференцијални равенки од прв ред. При тоа е добиена формула за тие полиноми и се добиваат некои релации меѓу тие полиноми и класичните ортогонални полиноми.

Нека е дадена диференцијална равенка од вид:

$$(z^2+Qz+R)(Sz+T)w'' + (\beta_2 z^2+\beta_1 z+\beta_0)w' + (\gamma_1 z+\gamma_0)w = 0. \qquad (1)$$

За равенката (1) е покажано 1983 година [1]дека има едно полиномно решение од степен n ако се задоволени релациите

$$\begin{gathered} n^2 S + (\beta_2 - S)n + \gamma_1 = 0, \\ S^2(\beta_0 + SR - QT) + T^2(S + \beta_2) - T\beta_1 S = 0, \\ S^2(\gamma_0 \beta_1 + \gamma_0^2 - \gamma_1\beta_0) + T(\gamma_1 + \beta_2)(T\gamma_1 - 2S\gamma_0) = 0 \end{gathered} \qquad (2)$$

каде n е помалиот, ако се два, природен број кој ја задоволува првата релација. При тоа е добиена и формулата за полиномното решение

$$w = e^{-F}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(z+K)(z^2+Qz+R)^{n-1}e^F] \ , \qquad (3)$$

каде $F = \int \frac{Mz+N}{z^2+Qz+R}dz$, $M = \frac{\beta_2 - S}{S}, N = \frac{\beta_1 - T}{S} - \frac{T\beta_2}{S^2}$,

$K = \frac{T\gamma_1 - n(S\beta_1 - 2T\beta_2 - T\gamma_1 + S\gamma_0)}{S\gamma_1}$.

Во истиот труд се покажува дека равенката (1), која ги задоволува условите (2), може да се сведе на систем диференцијални равенки од прв ред од вид:

$$(a_1z+a_2)y' + (b_1z+b_2)w' + Ay = 0,$$

$$(c_1z+c_2)y' + (d_1z+d_2)w' + Bw = 0, \qquad (4)$$

каде $w=w(z)$, $y=y(z)$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, A, B$ се константи и важи $b_1=0$, $nd_1+B=0$, $ra_1+A\neq 0$ за $r\in N$, $0\leq r <n$. При тоа системот ќе има едно решение $w=P_n(z)$, $y=Q_{n-1}(z)$, каде $P_n(z)$ е полином од n ти степен и $Q_{n-1}(z)$ полином од n-1 ви степен.

Во трудот на G.Milovanovic, W.Gautschi, H.Landau, објавен 1987 година [2], се дефинирани комплексни полиноми ортогонални на полукружница $\Gamma = \{z\in C \mid |z|=1, \mathrm{Im}z > 0\}$ во однос на скаларен производ дефиниран со $(f, g) = \int_\Gamma f(z)g(z)w(z)(iz)^{-1}dz$, каде тежинска функција е $w(z) = (1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$,$\lambda> -\frac{1}{2}$ и се покажани повеќе нивни својства. Во истиот труд е покажано дека една поткласа комплексни полиноми , дефинирани со класичните монични ортогонални полиноми на Gegenbauer, ортогонални во однос на тежинската функција $p(z) = (1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda> -\frac{1}{2}$, задоволува линеарна диференцијална равенка од втор ред од вид (1), каде:

$$S = 2(2n+2\lambda-1)(n+ \lambda-1)i\theta_{n-1} , \ T = 4(n+ \lambda-1)^2 \theta_{n-1}^2 - n(n+2\lambda -1),$$
$$R= -1,\ Q = 0,\ \beta_2 =2 \lambda S,\ \beta_1 = (2 \lambda+1)T,\ \beta_0 = S,\ \gamma_1 = -n(n+2\lambda -1)S,$$
$$\gamma_0 = (n+2\lambda -1)[n(2n+2\lambda -1) - (n-1)T],$$

и каде θ_n е дадена со рекуретната врска:

$$\theta_n = \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)\theta_{n-1}} ,\ n\in N, \text{ и } \theta_0 = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\lambda+1)},$$

$\Gamma(x)$ е Гама функција.

Може да се покаже дека оваа диференцијална равенка ги задоволува релациите (2) и според тоа , во согласност со формулата

(3), комплексните ортогонални полиноми можат да се добијат со формулата:

$$w_n^{\lambda}(z) = (n+2\lambda-1)^2 (z^2-1)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(z - \frac{2(n+\lambda-1)\theta_{n-1}}{(n+2\lambda-1)} i\right)\left(z^2-1\right)^{n+\lambda-\frac{3}{2}}\right] \tag{5}$$

Исто така оваа диференцијална равенка, во согласност со системот (4), може да се сведе на системот:

$$\left(z - \frac{2\theta_{n-1}(n+\lambda-1)}{n} i\right) y' - \frac{1}{n(n+2\lambda-1)} w' + (n+2\lambda-1) y = 0,$$

$$(Sz+T)y' + \left(z - \frac{2\theta_{n-1}(n+\lambda-1)}{(n+2\lambda-1)} i\right) w' - nw = 0. \tag{6}$$

При тоа системот има едно решение дадено со формулата (5) и со формулата:

$$y(z) \equiv P_{n-1}^{\lambda} = (z^2-1)^{-\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\left(z^2-1\right)^{n+\lambda-\frac{3}{2}}\right].$$

со која се дадени полиномите на Gegenbauer од n-1 –ви степен. Соодветната диференцијална равенка во однос на y е диференцијалната равенка на Gegenbauer

$$(z^2-1)y'' + (2\lambda+1)zy' - (n-1)(n-1+2\lambda)y = 0,$$

чии решенија се полиномите на Gegenbauer, ортогонални на сегментот [-1, 1] во однос на тежинската функција p(z) = $(1-z^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$,$\lambda > -\frac{1}{2}$ и според дефиницијата важи $w_n^{\lambda}(z) = P_n^{\lambda}(z) - i\theta_{n-1}P_{n-1}^{\lambda}(z)$.

Во трудот на G.Milovanovic и P.Rajkovic, објавен 1992 година [3], се разгледани комплексни полиноми, ортогонални на кружен лак

$\Gamma_R = \{z \in C \mid z = -iR + e^{i\theta}\sqrt{R^2+1}, \varphi \le \theta \le \pi - \varphi, tg\varphi = R\}$ во однос на скаларен производ дефиниран со (f, g) = $\int_{\Gamma_R} f(z)g(z)w(z)(iz-R)^{-1}dz$,

каде тежинска функција е w(z) $=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$, дефинирани од M.G.de Bruin 1990 година. Во истиот труд е покажано дека една таква поткласа комплексни полиноми, дефинирани со класичните монични ортогонални полиноми на Jacobi ,ортогонални во однос на тежинската функција p(z) $=(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$,$\alpha > -1$, $\beta > -1$, задоволува исто така диференцијална равенка од вид (1) со релациите (2), каде

$$S = (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)i\,\theta_{n-1},$$

$$T = -\frac{4n(n+\alpha)(n+\beta)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)^2} - i(\beta^2-\alpha^2)\frac{2n+\alpha+\beta-1}{2n+\alpha+\beta}\theta_{n-1} +$$

$$+(2n+\alpha+\beta-1)^2\theta_{n-1}^2$$

$$Q=0,\ R=-1,\ \beta_2=(\alpha+\beta+1)S,\ \beta_1=-(\beta-\alpha)S+(\alpha+\beta+2)T,$$

$$\beta_0=-(\beta-\alpha)T+S,\ \gamma_1=-n(n+\alpha+\beta)S,$$

$$\gamma_0=-n(n+\alpha+\beta+1)T+\frac{n(\beta-\alpha)}{2n+\alpha+\beta}S-\frac{1}{2n+\alpha+\beta}S^2, \qquad (7)$$

и каде θ_n е дадена со $\theta_{n-1} = \frac{1}{i}\frac{\rho_n(-iR)}{\rho_{n-1}(-iR)}$, $n\in N$,

$$\rho_n(z) = \int_{-1}^{1}\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{z-x}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,$$

а $P_n^{(\alpha,\beta)}$ (x) е полином на Jacobi од n –ти степен.

Во тој случај, во согласност со формулата (3), комплексните ортогонални полиноми можат да се добијат со формулата

$$w_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{n+\alpha+\beta}{2n+\alpha+\beta}(z-1)^{-\alpha}(z+1)^{-\beta}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{[(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta)z -$$

$$- (\beta-\alpha)(n+\alpha+\beta) - S](z-1)^{n+\alpha-1}(z+1)^{n+\beta-1}\}\,, \qquad (8)$$

каде S е даден со една од релациите (7) .

Во согласност со системот (4) соодветниот систем на кој оваа диференцијална равенка може да се сведе е

$$\left(z+\frac{n(\beta-\alpha)-S}{n(2n+\alpha+\beta)}\right)y' - \frac{1}{n(n+\alpha+\beta)}w' + (n+\alpha+\beta)y = 0\,,$$

$$(Sz+T)y' + \left(z-\frac{(\beta-\alpha)(n+\alpha+\beta)+S}{(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta)}\right)w' - nw = 0\,. \qquad (9)$$

Соодветната диференцијална равенка која се добива од овој систем во однос на y е диференцијалната равенка на Jacobi

$$(z^2-1)y'' + [(\alpha+\beta+2)z - (\beta-\alpha)]\,y' - (n-1)(n+\alpha+\beta)y = 0.$$

чии решенија се полиномите на Jacobi од степен n-1 дадени со формулата

$$y(z) = P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z) = (z-1)^{-\alpha}(z+1)^{-\beta}\,\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-1)^{n+\alpha-1}(z+1)^{n+\beta-1}]\,,$$

ортогонални на сегментот [-1, 1] во однос на тежинската функција $p(z) = (1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}$,$\alpha > -1$, $\beta > -1$. При тоа важи

$$w_n^{(\alpha,\beta)}(z) = P_n^{(\alpha,\beta)}(z) - i\theta_{n-1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z)\,.$$

За $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$, со ортогоналност дефинирана на полукружница, се добива првиот случај.

Од соодветните системи (9) односно (6) можат да се добијат и соодветни релации меѓу комплексните ортогонални полиноми и класичните монични ортогонални полиноми на Jacobi односно Gegenbauer. Исто така може да се покаже дека соодветните диференцијални равенки чии решенија се комплексните ортогонални полиноми немаат второ партикуларно решение полином бидејќи потребниот услов степенот на второто полиномно решение да е корен на карактеристичната равенка не е задоволен. Имено вториот корен на карактеристичната равенка е - $(n+2\lambda-1)<0$ ($\notin N$) во првиот случај, и е - $(n+\alpha+\beta)<0$ ($\notin N$) во вториот случај.

ON COMPLEX POLYNOMIALS ORTHOGONAL TO CIRCLE ARC

Boro Piperevski

Abstract
It is shown that some subclasses of complex polynomials, orthogonal to circle arc are solutions of linear differential equation of second order which can be reduced to a system of linear differential equations of first order. A formula for this polynomials is also obtained,

ЛИТЕРАТУРА

1. Пиперевски Боро М. : За една формула на полиномно решение на една класа линеарни диференцијални равенки од втор ред ; СДМ на СРМ, Математички билтен, книга 7-8 , стр. 10-15. Скопје 1983-84.
2. Walter Gautschi, Henry J. Landau, and Gradimir V. Milovanović : Polynomials Orthogonal on the Semicircle, II ; Constructive Approximation (1987) 3: 389-404, Springer-Verlag New York Inc.
3. Gradimir V. Milovanović , Predrag M. Rajković : On polynomials orthogonal on a circular arc ; Journal of Computational and Applied Mathematics 51 (1994) 1 – 13, Elsevier Science B.V. , Amsterdam, Netherlands.