Седми Македонски Симпозиум по диференцијални равенки,
Охрид, 26-29.09.2002, Зборник на трудови

ЕГЗИСТЕНЦИЈА И КОНСТРУКЦИЈА НА ОПШТО РЕШЕНИЕ НА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД СО ПОЛИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Боро Пиперевски[1] , Невена Серафимова[2]
[1]Електротехнички факултет - Скопје
[2]Воена Академија”Генерал Михајло Апостолски” - Скопје

Апстракт:
Во овој труд се разгледува една класа линеарни диференцијални равенки од втор ред со полиномни коефициенти. Со смена на функцијата и со користење на егзистенцијален услов за полиномно решение се добиени егзистенцијални услови за интеграбилност во кои е содржан природен број. При тоа е добиена и формула за општо решение на равенката и на крај се дадени повеќе примери.

1. Нека е дадена диференцијална равенка од вид

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' + c_0y = 0, \qquad (1)$$

односно од вид

$$Ay'' + By' + Cy = 0,$$

каде $A = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $B = b_1x + b_0, C = c_0$.

Нека диференцијалната равенка (1) има полиномно решение од степен n и нема друго полиномно решение од степен помал од n. Тогаш n е корен на карактеристичната равенка:

$$\frac{n(n-1)}{2}A'' + nB' + C = 0. \qquad (2)$$

Диференцијалната равенка:

$$Av'' + (B+nA')v' = 0, \qquad (3)$$

има две линеарно независни партикуларни решенија

$$v_1 = 1, \quad v_2 = \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx .$$

Со смената

$$v = A^{1-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} w ,$$

равенката (3) се трансформира во равенката:

$$Aw'' - [(n-2)A'+B]w' - [(n-1)A'' + B']w = 0, \qquad (4)$$

која, согласно смената има две линеарно независни партикуларни решенија:

$$w_1 = A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} , \; w_2 = A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx .$$

По n последователни диференцирања на равенката (4) се добива равенката:

$$Aw^{(n+2)} + (2A'-B)w^{(n+1)} + [A'' - B' - (\frac{n(n-1)}{2} A'' + nB')]w^{(n)} = 0,$$

или , во согласност со условот (2), равенката:

$$Aw^{(n+2)} + (2A'-B)w^{(n+1)} + (A'' - B' + C)w^{(n)} = 0,$$

Во согласност со соодветната смена последната равенка има две партикуларни решенија w_1 и w_2 за кои важи

$$w_1^{(n)} = (A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx})^{(n)} , \; w_2^{(n)} = (A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx)^{(n)} ,$$

а, очигледно, останатите n партикуларни решенија со кои заедно се формира еден фундаментален систем, се степенските функции 1, x, x^2, ..., x^{n-1} .
Ако во последната диференцијална равенка се стави $w^{(n)} = z$, ќе се добие равенката:

$$Az'' + (2A'-B)z' + (A'' - B' + C)z = 0,$$

која има општо решение

$$z = C_1 \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \right)^{(n)} + C_2 \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx \right)^{(n)} .$$

Со смената

$$z = A^{-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} y$$

дефинитивно се добива равенката (1) и нејзиното општо решение ќе биде дадено со формулата

$$y = C_1 \, A e^{-\int \frac{B}{A}dx} \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \right)^{(n)} +$$
$$+ C_2 \, A e^{-\int \frac{B}{A}dx} \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \int A^{-n} e^{-\int \frac{B}{A}dx} dx \right)^{(n)} , \qquad (5)$$

каде C_1, C_2 се произволни константи.

Полиномното решение од степен n е дадено со формула

$$P_n = A e^{-\int \frac{B}{A}dx} \left(A^{n-1} e^{\int \frac{B}{A}dx} \right)^{(n)} ,$$

наречена формула на Родригез.

Со стандардна процедура кога е познато едно партикуларно решение y = F(x) за општото решение на диференцијалната равенка (1) се добива друга, различна од формулата (5), формула:

$$y = C_2 F + C_1 F \int \frac{1}{F^2} e^{-\int \frac{B}{A}} . \qquad (5^*)$$

2. Нека е дадена диференцијална равенка од вид (1) и нека x_1, x_2 се реални различни корени на квадратната равенка $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, при што $a_2 \neq 0$. Нека диференцијалната равенка (1) ја запишеме во вид:

$$y'' + \left(\frac{p}{x - x_1} + \frac{q}{x - x_2} \right) y' + \frac{r}{(x - x_1)(x - x_2)} y = 0 , \qquad (6)$$

каде $p = \dfrac{b_1 x_1 + b_0}{x_1 - x_2}$, $q = \dfrac{b_1 x_2 + b_0}{x_2 - x_1}$, $r = c_0$.

Со трансформациите

$$y = (x-x_1)^{1-p} z_1 ,$$
$$y = (x-x_2)^{1-q} z_2 , \qquad (7)$$
$$y = (x-x_1)^{1-p} (x-x_2)^{1-q} z_3 ,$$

равенката (6) се трансформира во најмногу три други равенки од иста форма [1,2], дадени со

$$z_1'' + \left(\frac{2-p}{x-x_1} + \frac{q}{x-x_2}\right) z_1' + \frac{r-pq+q}{(x-x_1)(x-x_2)} z_1 = 0 ,$$
$$z_2'' + \left(\frac{p}{x-x_1} + \frac{2-q}{x-x_2}\right) z_2' + \frac{r-pq+p}{(x-x_1)(x-x_2)} z_2 = 0 , \qquad (8)$$
$$z_3'' + \left(\frac{2-p}{x-x_1} + \frac{2-q}{x-x_2}\right) z_3' + \frac{r-p-q+2}{(x-x_1)(x-x_2)} z_3 = 0 .$$

Условот карактеристичната равенка $t^2 + (p+q-1)t + r = 0$ да има корен природен број n ,помалиот ако и двата корена се природни броеви, е потребен и доволен услов диференцијалната равенка (6) да има едно полиномно решение од степен n и да нема друго полиномно решение од степен помал од n. Овој услов применет на равенката (6) и равенките (8), ќе биде даден соодветно со релациите

$$n^2 + (p+q-1)n + r = 0,$$
$$n^2 + (q-p+1)n + r-pq +q = 0, \qquad (9)$$
$$n^2 + (p-q+1)n + r-pq +p = 0,$$
$$n^2 + (3-p-q)n + r-p-q+2 = 0,$$

каде во секоја од релациите n е природен број (помалиот ако соодветната карактеристична равенка има корени два природни броја).

Ако диференцијалната равенка од вид (6) има едно полиномно решение од степен n и нема друго полиномно решение од степен помал од n, тогаш во согласност со формулата (5), нејзиното општо решение ќе биде дадено со формулата:

$$y = (x-x_1)^{1-p}(x-x_2)^{1-q}\left\{(x-x_1)^{n+p-1}(x-x_2)^{n+q-1}\left[C_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + C_2 \int (x-x_1)^{-n-p}(x-x_2)^{-n-q} dx \ \right]\right\}^{(n)} , \ C_1, C_2 \text{ - константи.}$$

ТЕОРЕМА: Нека е дадена диференцијална равенка (6). Нека t=**a** е корен на карактеристичната равенка $t^2 + (p+q-1)t + r = 0$. Ако коренот **a** задоволува еден од условите:

1^0 **a** $\in$ N , помалиот корен ако се двата природни броеви,

2^0 **a** + p-1$\in$ N или –(**a**+q) $\in$ N , помалиот корен ако се двата природни броеви,

3^0 **a** + q-1$\in$ N или –(**a**+p) $\in$ N , помалиот корен ако се двата природни броеви,

4^0 **a** + p+q-2$\in$ N или –(**a**+1) $\in$ N , помалиот корен ако се двата природни броеви,

тогаш равенката (6) е интеграбилна во затворен вид и при тоа во согласност со формулата (5) има општо решение , соодветно за секој случај, дадено со формулата:

1^0 $$y=(x-x_1)^{1-p}(x-x_2)^{1-q}\Big\{(x-x_1)^{n+p-1}(x-x_2)^{n+q-1}\Big[C_1+ + C_2\int (x-x_1)^{-n-p}(x-x_2)^{-n-q}\,dx\ \Big]\Big\}^{(n)}$$, каде n = **a**.

2^0 $$y=(x-x_2)^{1-q}\Big\{(x-x_1)^{n-p+1}(x-x_2)^{n+q-1}\Big[C_1+ + C_2\int (x-x_1)^{-n+p-2}(x-x_2)^{-n-q}\,dx\ \Big]\Big\}^{(n)}$$, каде n = **a** + p-1 или n = –(**a**+q),

3^0 $$y=(x-x_1)^{1-p}\Big\{(x-x_1)^{n+p-1}(x-x_2)^{n-q+1}\Big[C_1+ + C_2\int (x-x_1)^{-n-p}(x-x_2)^{-n+q-2}\,dx\ \Big]\Big\}^{(n)}$$, каде n = **a** + q-1 или n= –(**a**+p).

4^0 $$y=\Big\{(x-x_1)^{n-p+1}(x-x_2)^{n-q+1}\Big[C_1+ + C_2\int (x-x_1)^{-n+p-2}(x-x_2)^{-n+q-2}\,dx\ \Big]\Big\}^{(n)}$$, каде n=**a** + p+q-2 или n = –(**a**+1) ,

при што C_1,C_2 се произволни константи.

Условите 1^0 , 2^0, 3^0 и 4^0 се добиени од релациите (9) во согласност со условот (2) применет на диференцијалните равенки (6) и (8) соодветно. Формулите 1^0, 2^0, 3^0 и 4^0 за општо решение се добиени врз основа на формулата (5) и соодветните трансформации (7).

Во случајот 1^0 диференцијалната равенка (6) има едно полиномно решение дадено со формулата на Родригес. Во согласност со дадените формули диференцијалната равенка (6) ќе има едно рационално решение ако барем еден од броевите p и q е цел број.

Пример 1:

Нека е дадена диференцијалната равенка од втор ред

$$.(x^2+3x+2)\,y''+(3x+4)y'-8y=0 \tag{1.1}$$

Корените на полиномот од втор ред се $x_1=-1$ и $x_2=-2$.

Земајќи $p=1,\ q=2$ и $r=-8$, равенката (1.1) може да се запише во обликот

$$y''+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)y'-\frac{8}{(x+1)(x+2)}y=0 \quad , \tag{1.1'}$$

а нејзината карактеристична равенка гласи $t(t-1)+3t-8=0.$

Бидејќи последната равенка има еден единствен природен корен $a=2$, според случајот 1^0, равенката (1.1) ќе има полиномно решение од степен 2. Нејзиното општо решение според формулата 1^0 е дадено со:

$$y = (x+2)^{-1}\ \{(x+1)^2(x+2)^3\ [C_1 + C_2\textstyle\int(x+1)^{-3}(x+2)^{-4}dx]\}'' =$$
$$= C_1(20x^2+56x+38) +$$
$$C_2\left[\frac{-x^2+x+3}{(x+1)^2(x+2)^3}+(20x^2+56x+38)\int\frac{dx}{(x+1)^3(x+2)^4}\right].$$

Во согласност со формулата (5*) општото решение е дадено и со

$$y=C_1F+C_2F\int\frac{1}{F^2}\cdot\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}dx \ ,$$

каде $F=10x^2+28x+19$.

Со смените $y=(x+2)^{1-1}z_1$, $y=(x+2)^{-1}z_2$, $y=(x+2)^{-1}z_3$, $z_i=z_i(x)$,i=1,2,3 во (1) , се добиваат равенките:

$$(x^2+3x+2)\,z_1''+(3x+4)z_1'-8z_1=0\,,$$
$$(x^2+3x+2)z_2''+(x+2)z_2'-9z_2=0\,,$$
$$(x^2+3x+2)z_3''+(x+2)z_3'-9z_3=0\,,$$
односно равенките
$$z_1''+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}\right)z_1'-\frac{8}{(x+1)(x+2)}z_1=0\,,$$
$$z_2''+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{0}{x+2}\right)z_2'-\frac{9}{(x+1)(x+2)}z_2=0\,,$$
$$z_3''+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{0}{x+2}\right)z_3'-\frac{9}{(x+1)(x+2)}z_3=0\,,$$

кои во согласност со смените имаат општи решенија:

$$z_1 = y = C_1(20x^2+56x+38) +$$
$$C_2\left[\frac{-x^2+x+3}{(x+1)^2(x+2)^3}+(20x^2+56x+38)\int\frac{dx}{(x+1)^3(x+2)^4}\right],$$

$$z_2 = z_3 = C_1(x+2)(20x^2+56x+38) +$$
$$C_2(x+2)\left[\frac{-x^2+x+3}{(x+1)^2(x+2)^3}+(20x^2+56x+38)\int\frac{dx}{(x+1)^3(x+2)^4}\right].$$

Пример 2:

Нека е дадена диференцијалната равенка од втор ред:

$$(4x^2-4x-8)y''+(8x+2)y'-3y=0\,. \qquad (2.1)$$

Нулите на полиномот пред y'' се $x_1=-1$ и $x_2=2$, и таа може да се запише во обликот:

$$y''+\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{3}{2(x-2)}\right)y'-\frac{3}{4(x+1)(x-2)}y=0\,. \qquad (2.1')$$

Оттука, ги добиваме вредностите $p=\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{2}$ и $r=-\frac{3}{4}$.

Карактеристичната равенка на (2.1) гласи $t(t-1)+2t-\frac{3}{4}=0$, и има корени $a_1=-\frac{3}{2}$ и $a_2=\frac{1}{2}$. Јасно е дека (2.1) нема да има полиномни решенија. За $a_2=\frac{1}{2}$ се добива $a+q-1=1 \quad \in \mathrm{N}$, случај 3^0, и со смената $y=(x-2)^{-\frac{1}{2}}z_2,\; z_2=z_2(x)$, се добива единствената трансформирана равенка:

$$(2x^2-2x-4)z_2''+(2x-1)z_2'-2z_2=0, \tag{2.2}$$

односно

$$z_2''+\left(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-2)}\right)z_2'-\frac{1}{(x+1)(x-2)}z_2=0,$$

која има полиномно решение.

Според формулата 3^0 општото решение на равенката (2.1) е

$$y=(x+1)^{\frac{1}{2}}\left\{(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{1}{2}}[C_1+C_2\int(x+1)^{-\frac{3}{2}}(x-2)^{-\frac{3}{2}}dx]\right\}'=$$

$$=C_1\frac{1}{2}\left[(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x+1)(x-2)^{-\frac{1}{2}}\right]+$$

$$C_2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{-1}+\frac{1}{2}[(x-2)^{\frac{1}{2}}+(x+1)(x-2)^{-\frac{1}{2}}]\int(x+1)^{-\frac{3}{2}}(x-2)^{-\frac{3}{2}}dx\right]$$

Во согласност со смената општото решение на равенката (2.2) ќе биде дадено со формулата

$$z_2=(x-2)^{\frac{1}{2}}y=C_1\frac{1}{2}(2x-1)+$$

$$+C_2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(2x-1)\int(x+1)^{-\frac{3}{2}}(x-2)^{-\frac{3}{2}}dx\right].$$

Со смените $y=(x+1)^{\frac{1}{2}}\, z_1$ и $y=(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{-\frac{1}{2}}\, z_3$, се добиваат содветно равенките:

$$(2x^2-2x-4)\; z_1''+(6x-3)\; z_1'\;=0\,,$$
$$(4x^2-4x-8)\; z_3''+(8x-10)\; z_3'-3z_3=0\;,$$

односно

$$z_1''+\left(\frac{3}{2(x+1)}+\frac{3}{2(x-2)}\right)z_1'\;=0\,,$$
$$z_3''+\left(\frac{3}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-2)}\right)z_3'-\frac{3}{4(x+1)(x-2)}z_3=0\,,$$

чии општи решенија може да се добијат користејќи ги соодветните смени на трансформација.

Пример 3:

Нека е дадена диференцијалната равенка од втор ред:

$$(x^2+3x+2)\,y''+(7x+10)y'-7y=0\,. \qquad (3.1)$$

Корените на полиномот x^2+3x+2 се $x_1=1$ и $x_2=2$, и таа може да се запише во обликот:

$$y''+\left(\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x+2}\right)y'\;-\frac{7}{(x+1)(x+2)}y=0\,. \qquad (3.1’)$$

Карактеристичната равенка на (3.1) е $t(t-1)+7t-7=0$, со решенија $a=1\in \mathrm{N}$ и $a_1=-7$. Од (3.1’) ги добиваме $p=3,$ $q=4$ и $r=-7$, од каде следи $a+p-1=3\in \mathrm{N},$ $a+q-1=4\in \mathrm{N},$ $a+p+q-2=6\in \mathrm{N}$. Според тоа заклучуваме дека (3.1), заедно со трансформираните равенки:

$$(x^2+3x+2)z_1''+(3x+2)z_1'-15z_1=0\;, \qquad (3.2)$$

$$(x^2+3x+2)z_2''+(x+4)z_2'-16z_2=0, \qquad (3.3)$$
$$(x^2+3x+2)z_3''-(3x+4)z_3'-12z_3=0, \qquad (3.4)$$

кои се добиени со соодветните смени

$$y=(x+1)^{-2}\ z_1\ ,\ y=(x+2)^{-3}\ z_2,\ y=(x+1)^{-2}(x+2)^{-3}z_{3},$$

ќе имаат полиномни решенија.

Со користење на формулата 1^0 се добива општото решение на равенката (3.1):

$y = (x+1)^{-2}\,(x+2)^{-3}\,\{C_1[(x+1)^3(x+2)^4]' + C_2[(x+1)^3(x+2)^4\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx]'\} =$

$$=C_1(7x+10)+C_2\left[(x+1)^{-3}(x+2)^{-4}+(7x+10)\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx\ \right].$$

Општите решенија на (3.2), (3.3) и (3.4) , може да се добијат користејќи ги соодветните смени на трансформација:

$$z_1=C_1(x+1)^2(7x+10)+$$
$$+C_2\left[(x+1)^{-1}(x+2)^{-4}+(x+1)^2(7x+10)\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx\right],$$
$$z_2=C_1(x+2)^3(7x+10)+$$
$$+C_2\left[(x+1)^{-3}(x+2)^{-1}+(x+2)^3(7x+10)\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx\right],$$
$$z_3=\ C_1(x+1)^2(x+2)^3(7x+10)+C_2\left[(x+1)^{-1}(x+2)^{-1}+\right.$$
$$\left.+(x+1)^2(x+2)^3(7x+10)\int(x+1)^{-4}(x+2)^{-5}dx\ \right].$$

Општото решение на равенката (3.1), според формулата (5*), може да биде дадено и со формулата :

$$y=C_1(7x+10)+C_2(7x+10)\int\frac{1}{(7x+10)^2}e^{-\int\frac{7x+10}{(x+1)(x+2)}dx}dx\ .$$

Пример 4:

Нека е дадена диференцијалната равенка од втор ред

$$y'' + \left(-\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x-2} \right) y' - \frac{4}{(x-1)(x-2)} = 0 \qquad (4.1)$$

Нејзината карактеристична равенка е дадена со $t(t-1) + t - 4 = 0$, чие единствено позитивно целобројно решение е $a = 2$. Оттука, равенката (4.1) има полиномно решение од степен 2.
Бидејќи $p = -3, \quad q = 4, \quad r = -4,$ добиваме

$$a + q - 1 = 5 \in \mathrm{N},\ a + p + q - 2 = 1 \in \mathrm{N}$$

од каде заклучуваме дека и равенките:

$$z_2'' + \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{-2}{x-2} \right) z_2' + \frac{5}{(x-1)(x-2)} z_2 = 0 \ , \qquad (4.2)$$

$$z_3'' + \left(\frac{5}{x-1} + \frac{-2}{x-2} \right) z_3' - \frac{3}{(x-1)(x-2)} z_3 = 0 \, , \qquad (4.3)$$

добиени од (4.1) со смените $y = (x-2)^{-3} z_2$, $y = (x-1)^4 (x-2)^{-3} z_3$, имаат полиномни решенија.

Во согласност со формулата 1^0 општото решение на равенката (4.1) е дадено со формулата:

$$y = (x-1)^4 (x-2)^{-3} \{C_1[(x-1)^{-2}(x-2)^5]'' + C_2[(x-1)^{-2}(x-2)^5 \int (x-1)(x-2)^{-6} dx]''\} =$$
$$= C_1(6x^2 - 4x + 4) + C_2 \frac{-5x+8}{10(x-2)^3} \, .$$

Во согласност со смените општите решенија на равенките (4.2) и (4.3) се дадени со формулите

$$z_2 = (x-2)^3 y = C_1 (x-2)^3 (6x^2 - 4x + 4) + C_2 \frac{-5x+8}{10} \, ,$$

$$z_3 = (x-1)^{-4} (x-2)^3 y = C_1 \frac{(x-2)^3 (6x^2 - 4x + 4)}{(x-1)^4} + C_2 \frac{-5x+8}{10(x-1)^4} \, .$$

Очигледно од општото решение на равенката (4.3) непосредно не се согледува дека таа има едно партикуларно решение полином од прв степен. Сепак со линеарната комбинација од двете партикуларни решенија кои го формираат општото решение, се добива и полиномното решение т.е.

$$\frac{(x-2)^3(3x^2-2x+2)}{(x-1)^4}+\frac{-5x+8}{(x-1)^4}=3x-8\,.$$

Равенката

$$z_1''+\left(\frac{5}{x-1}+\frac{4}{x-2}\right)z_1'+\frac{12}{(x-1)(x-2)}\,z_1=0\,, \qquad (4.4)$$

која ја добиваме од (4.1) со смената $y=(x-1)^4 z_1$, за општо решение има рационална функција, дадена со:

$$z_1=C_1\frac{(3x^2-2x+2)}{(x-1)^4}+C_2\frac{3x-8}{(x-2)^3}\quad .$$

Формулата на општото решение на равенката (4.1), според (5*) , е дадена и со

$$y=C_1(3x^2-2x+2)+C_2\frac{(3x-8)(x-1)^4}{(x-2)^3}\,.$$

EXISTENCE AND CONSTRUCTION OF THE GENERAL SOLUTION OF A CLASS OF SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

Boro Piperevski, Nevena Serafimova

Abstract:

In this work we observe a class of linear differential equations of second order with polynomial coefficients. Some substitutions for the given equation are introduced using the coefficient in front of y”, and with their help the existential conditions for the integrability of the new equations are obtained, containing natural number. In addition, the formula of the general solution is obtained, and at the end some examples are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boro M.Piperevski: One transformation of a class of linear differential equations, of the second order ; Department of Electrical Engineering , Proceeding 6-7 , 27-34, Skopje, 1990.
2. Boro M.Piperevski: On the existence and construction of a rational solutions of a class of linear differential equation of the second order with polynomial coefficients; СМИМ, Математички билтен , 21, 21-26, 1997, Скопје.