ОПРЕДЕЛУВАЊЕ АНАЛИТИЧНОСТ НА ФУНКЦИИ СО ПОМОШ НА ДИСТРИБУЦИИ

Никола Речкоски, Васко Речкоски
Универзитет "Св. Климент Охридски", Битола, Факултет за туризам и угостителство, Охрид

Резиме

Во оваа работа покажуваме на примери како се определува областа на аналитичност на комплексна функција зададена во интегрален вид , со помош на дистрибуции.

I. Нека X е мерлив простор со комплексна мера μ, Ω е отворено множество во комплексната рамнина C. На $\Omega x X$ е дефинирана функција $\varphi(z,t)$ која е: ограничена , за секое $t \in X$ е аналитична на Ω и за секое $z \in X$ е мерлива на X, тогаш функцијата

(1) $$f(z) = \int_X \varphi(z,t) d\mu(t)$$

е аналитична на Ω и $f^{'}(z) = \int_X \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z,t) d\mu(t)$. [4.стр.220 зад15]

Во оваа работа се разгледуваат функции од видот (1) од аспект на аналитичната репрезентација на дистрибуциите

II. Ознаки и основни факти за дистрибуција

Буквата D е општо прифатена ознака за просторот од основните функции ,во овој случај определени на множеството од реалните броеви R. Во просторот D низата (φ_n) конвергира кон 0 , ако:

(i) носачот $\sup p\varphi_n$ на секоја функција се содржи во едно компактно множество K и

(ii) низата (φ_n) конвергира рамномерно за секој ненегативен цел број j .

Просторот од непрекинатите линеарни функционали или дистрибуции на Шварц е D'.

O_α, α реален број, е простор од сите бесконечно диференцијабилни функции на R со особината $\varphi^{(m)}(t) = O(|t|^\alpha)$.

Конвергенцијата во O_α се дефинира вака:
Низата функции (φ_n) конвергира кон 0 ако

(i) конвергира рамномерно на било кое компактно множество од било кој ред и

(ii) за секое j постои c_j>0 така што $\left|D^j \varphi_n(t)\right| \le c_j |t|^\alpha$ за сите t.

Просторот од сите линеарни непрекинати функционали на O_α е $O_\alpha^{'}$.

Очигледно, дека $D \subset O_\alpha$ и конвергентна низа во D е конвергентна и во O_α затоа $D^{'} \supset O_\alpha^{'}$. Во општ случај важи $O_\alpha \subset O_\beta, O_\alpha^{'} \supset O_\beta^{'}$ за $\alpha \le \beta$.

Носачот на дистрибуција $T \in D^{'}$ се обележува со $\sup pT$ и е затворено множество од R така што на $\Omega = R \setminus \sup pT$ дистрибуцијата се анулира. Просторот од сите дистрибуции со компактен носач се обележува со E'.

За секоја дистрибуција $T \in D'$ постои комплексна функција $f(z)$ која е аналитична на $\Omega = C \setminus \sup pT$ и важи

(2) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon) \right] \varphi(x)dx = T(\varphi), \varphi \in D \quad .$$

Се вели уште дека регуларните дистрибуции $f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)$ конвергираат кон T во смисол на дистрибуции кога $\varepsilon \to 0^+$. Функцијата $f(z)$ се вика аналитична репрезентација за дистрибуцијата T, при што ако и $g(z)$е аналитична репрезентација , тогаш $f(z) - g(z)$ е цела функција. Секоја цела функција е аналитична репрезентација на нула дистрибуцијата.

Определувањето на аналитичката репрезентација за дадената дистрибуција T во општ случај , не е лесна работа, меѓутоа ако T' има компактен носач тогаш функцијата $\hat{T}(z) = \frac{1}{2\pi i} T\left(\frac{1}{t-z}\right)$ е нејзина аналитична репрезентација која уште се вика Кошиева репрезентација зашто се добива од јадрото на Коши $h_z(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t-z}$.

Елементите од просторот $O_\alpha^{'}$ за $\alpha \geq -1$ имаат Кошиева репрезентација [1 стр. 80] и всушност со таа цел се воведени просторите O_α.

III. Содржина на работата

Најнапред ја даваме следната лема.

Лема. Секоја комплексна барелова мера μ на R, определува непрекинат линеарен функционал на O_α за $\alpha < 0$.

Доказ. Дефинираме функционал T_μ со:

(3) $$T_\mu(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\mu(t), \varphi \in O_\alpha, \alpha < 0.$$

Од непрекинатоста на $\varphi(t)$ следи мерливоста , а од ограниченоста на $\varphi(t)$ заради условот $\alpha < 0$ следи интеграбилноста на функцијата. Според тоа функционалот (3) е добро дефиниран на O_α. Линеарноста на функционалот е очигледна , останува да ја докажеме уште непрекинатоста . Нека низата $(\varphi_n(t))$ конвергира во O_α.

$$T_\mu(\varphi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) d\mu(t) = \int_{|t| \leq M} \varphi_n(t) d\mu(t) + \int_{|t| > M} \varphi_t(t) d\mu(t).$$

$$\left| T_\mu \varphi_n(t) \right| \leq \left| \int_{|t| \leq T} \varphi_n(t) d\mu(t) \right| + \left| \int_{|t| > M} \varphi_n(t) d\mu(t) \right| \leq \int_{|t| \leq M} |\varphi_n(t)| d|\mu|(t) + C_0 M^{\alpha} |\mu|(R)$$

каде $|\varphi_n(t)| \leq C_0 |t|^{\alpha}$ за секое n. За доволно големо М од $\alpha, < 0$ вториот собирок е помал од $\frac{\varepsilon}{2}$ за дадено $\varepsilon > 0$. Првиот собирок заради рамномерна конвергенција на низата на компактното множество $|t| \leq M$ за $n \geq n_0$ исто така може да се направи помал од $\frac{\varepsilon}{2}$ со тоа покажавме дека $|T_\mu(\varphi_n)| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$, што значи функционалот е непрекинат.

Ако $-1 \leq \alpha < 0$ дистрибуцијата T_μ има Кошиева репрезентација

$$T_{\mu}(z)=\hat{\mu}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu(t)}{t-z}, \operatorname{Im} z\neq 0$$

која е аналитичка на $\Omega = C\setminus \sup pT_{\mu}$.

Забелешка: Аналитичноста на $\hat{\mu}(z)$ следи и од I., бидејќи функцијата $h(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t-z}, \operatorname{Im} z\neq 0$ ги исполнува условите за(1).

Пример 1. Да се определи обласата на аналитичност за функцијата

$$f(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)dt}{t-z} \text{ , каде } \int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt<\infty .$$

Од условот имаме, дека функцијата $g(t)$ е Лебег интеграбилна, затоа $\mu(E)=\int_E g(t)dt$ е комплексна Борелова мера со $|\mu|(R)=\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|dt<\infty$. Како $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)d\mu(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)g(t)dt$ следи , дека $T(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)g(t)dt$ е елемент од $O_{\alpha}^{'}$ според лемата аналитичката репрезентација е $\frac{f(z)}{2\pi i}$ што покажува дека $f(t)$ е аналитична на $\Omega = C/\sup g$.

Пример2. Да се испита аналитичноста на функцијата $f(z)=\int_0^{\infty}\frac{dt}{e^t-z}$.

Со смената $u=e^t$ добиваме $f(z)=\int_1^{\infty}\frac{\frac{1}{u}du}{u-z}$. Ја разгледуваме регуларната дистрибуција $T=\frac{1}{u}\chi_{[1,\infty]}^{(u)}$, $\chi_{[1,\infty)}(u)=\begin{matrix}0, u\notin[1,\infty)\\ 1, u\in[1,\infty)\end{matrix}$.

За дистрибуцијата Т асимптотска гранка е $|u|^{-1}$, затоа од условот $\alpha+1+(-1)<0$ имаме за $\alpha<0, T$ е функционал од O_{α} [1.стр82]. Следователно $\frac{f(z)}{2\pi i}$ е аналитичка репрезентација за Т тоа значи е аналитична на $\Omega = C\setminus[1,\infty)$.Скокот на $\frac{f(z)}{2\pi i}$ за $u\in(1,\infty)$е $\frac{1}{u}$,за $u<1$ е 0.

Со решавање на интегралот се добива репрезентацијата во експлицитен вид : $f(z) = -\frac{1}{z}\log(1-z)$, логаритамот е главна вредност .

Од добиениот израз за $f(z)$ лесно се покажува , дека

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x+i\varepsilon}\log(1-x-i\varepsilon)+\frac{1}{x-i\varepsilon}\log(1-x+i\varepsilon)\right]=\begin{matrix}\frac{1}{x}, x\in(1,\infty)\\ \frac{1}{2}, x=1\\ 0, x<1\end{matrix}\quad .$$

Последниот лимес не е еднаков со функцијата $\frac{1}{x}\chi_{[1,\infty)}(x)$, но во смисол на дистрибуции тие се еднакви .

Со пресметување на лимесот на $f(z)$ кога z се приближува кон x-оската од горната полурамнина се добива функцијата

$$h_+(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{x+i\varepsilon}\log(1-x-i\varepsilon)\right)=\begin{matrix}-\frac{1}{x}\log(1-x), x<1\\ -1, x=0\\ -\frac{1}{x}\left[\log(x-1)-i\pi\right]x>1\end{matrix}\quad .$$

Бидејќи $h_+(x)$ е локално интеграбилна , лесно се проверува со теоремата на Лебег за доминантна конвергенција , дека

$$-\frac{1}{x+i\varepsilon}\log(1-x-i\varepsilon)\to h_+(x)$$

во смисол на дистрибуции, па според тоа $F(x)=\{\begin{smallmatrix}-\frac{1}{z}\log(1-z), \operatorname{Im} z>0\\ 0, \operatorname{Im} z<0\end{smallmatrix}$ е аналитична репрезентација за регуларната дистрибуција h_+

На ист начин се добива

$$h_-(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{x-i\varepsilon}\log(1-x+i\varepsilon)\right)=\begin{matrix}-\frac{1}{x}\log(1-x), x<1\\ -1, x=0\\ -\frac{1}{x}\left[\log(x-1)+i\pi\right]x>1\end{matrix}\quad .$$

Следователно $H(z)=\{ \begin{smallmatrix} 0, Iimz>0 \\ \frac{1}{z}\log(1-z), \operatorname{Im} z<0 \end{smallmatrix}$ е аналитична репрезентација за регуларната дистрибуција h_+.

Разгледуваната дистрибуција од примерот 2 е еднаква на $h_+ - h_-$, а репрезентацијата е $\hat{T}(z) = F(z) - H(z)$.

DETERMINING THE ANALYTICITY OF FUNCTIONS

Nikola Reckoski, Vasko Reckoski

Abstract
In this work, on examples, we show haw the area of analyticity of complex function given in integral form can be determined by means of analytic representation of distributions.

Литература

1. Бремерман, Распределенија,комплексне пермение и преобразованија Фурие,Издателство Мир москва 1968
2. B.Joseph, D.J.Newman , Complex analysis, Springer-Verlag1982
3. N.Reckoski, Une fonction analiytigne definie par une distribution,matematicki fakultet 1980
4. W.Rudin, Real and complex Analyisis,McGraw-Hill, New-York 1966