ÜBER EINE REDUZIERBARE HOMOGENE LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG DEREN ALLGEMEINES INTEGRAL EIN POLYNOM DARSTELLT

Ilija A. Šapkarev

Hier wollen wir die Differentialgleichung der Ordnung n

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = 0 \tag{1}$$

betrachten, wo $a_i = a_i(x)$ $(i = 0,1,...,n)$ Polynome vom Grad i

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{i} A_{i\,j} x^j$$

darstehelen und deren Koeffizienten $A_{i\,,j}$ $(A_{nn} \neq 0)$ Konstanten sind.

Es sei m eine natürlichte Zahl. Dann gült die Formel

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)})^{(m)} = \sum_{i=0}^{n} (a_i y^{(i)})^{(m)} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_i^{(j)} y^{(m+i-j)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{m}{j} a_i^{(j)} y^{(m+i-j)} \tag{2}$$

Wenn wir jetzt die Differentialgleichung (1) m mal differenzieren, nach der Formel (2), erhalten wir die Differentialgleichung der Ordnung $m+n$

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{m}{j} a_i^{(j)} y^{(m+i-j)} = 0 \ . \tag{3}$$

Da

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{m}{j} a_0^{(j)} y^{(m-j)} = \binom{m}{0} a_0 y^{(m)} \ ,$$

$$\sum_{j=0}^{1} \binom{m}{j} a_1^{(j)} y^{(m+1-j)} = \binom{m}{0} a_1 y^{(m+1)} + \binom{m}{1} a_1' y^{(m)} \ ,$$

$$\sum_{j=0}^{2} \binom{m}{j} a_2^{(j)} y^{(m+2-j)} = \binom{m}{0} a_2 y^{(m+2)} + \binom{m}{1} a_2' y^{(m+1)} + \binom{m}{2} a_2'' y^{(m)} \ ,$$

$$\sum_{j=0}^{i}\binom{m}{j}a_i^{(j)}y^{(m+i-j)}=\binom{m}{0}a_i y^{(m+i)}+\binom{m}{1}a_i{}'y^{(m+i-1)}+....+\binom{m}{j}a_i^{(j)}y^{(m+i-j)}+$$

$$+.......+\binom{m}{i-1}a_i^{(i-1)}y^{(m+1)}+\binom{m}{i}a_i^{(i)}y^{(m)},$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m}{j}a_{n-1}^{(j)}y^{(m+n-1-j)}=\binom{m}{0}a_{n-1}y^{(m+n-1)}+\binom{m}{1}a_{n-1}{}'y^{(m+n-2)}+.....+$$

$$+\binom{m}{j}a_{n-1}^{(j)}y^{(m+n-1-j)}+....+\binom{m}{n-1}a_{n-1}^{(n-2)}y^{(m+1)}+\binom{m}{n}a_{n-1}^{(n-1)}y^{(m)}\ ,$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{j}a_n^{(j)}y^{(m+n-j)}=\binom{m}{0}a_n y^{(m+n)}+\binom{m}{1}a_n{}'y^{(m+n-1)}+\ ....+$$

$$+\binom{m}{j}a_n^{(j)}y^{(m+n-j)}+....+\binom{m}{n-1}a_n^{(n-1)}y^{(m+1)}+\binom{m}{n}a_n^{(n)}y^{(m)}$$

kann die Differentialgleichung (3) in der folgenden Geftalt [3,6,7]

$$\binom{m}{0}a_n y^{(m+n)}+\left[\binom{m}{0}a_{n-1}+\binom{m}{1}a_n{}'\right]y^{(m+n-1)}+$$

$$+\left[\binom{m}{0}a_{n-2}+\binom{m}{1}a'_{n-1}+\binom{m}{2}a''_n\right]y^{(m+n-2)}+...+$$

$$+\left[\binom{m}{0}a_i+\binom{m}{1}a'_{i+1}+...+\binom{m}{j}a_{i+j}^{(j)}+...+\binom{m}{n-1}a_n^{(n-i)}\right]y^{(m+i)}+...+$$

$$+\left[\binom{m}{0}a_2+\binom{m}{1}a'_3+...+\binom{m}{j}a_{2+j}^{(j)}+...+\binom{m}{n-2}a_n^{(n-2)}\right]y^{(m+2)}+$$

$$+\left[\binom{m}{0}a_1+\binom{m}{1}a'_2+...+\binom{m}{j}a_{1+j}^{(j)}+...+\binom{m}{n-1}a_n^{(n-1)}\right]y^{(m+1)}+$$

$$+\left[\binom{m}{0}a_0+\binom{m}{1}a'_1+...+\binom{m}{j}a_j^{(j)}+...+\binom{m}{n}a_n^{(n)}\right]y^{(m)}=0$$

bezeihungsweise

$$\sum_{j=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{n-i}\binom{m}{j}a_{i+j}^{(j)}\right]y^{m+i}=0 \tag{4}$$

aufgeschrieben werden.

Weiter machen wir die Voraussetzung, dass die Differentialgleichung (1) n Polynome der Grade $m, m+1, ..., m+n-1$ bezitzt.

Diesfalls ist es sehr leicht aus der Differentialgleichung (4) zu Konstatieren, dass die folgenden Relationen [3,6,7]

$$\sum_{j=0}^{n-i}\binom{m}{j}a_{i+j}^{(j)}=0\ ;\qquad i=0,1,..,n-1$$

das heist die Relationen

$$\binom{m}{0}a_0+\binom{m}{1}a_1'+\ldots+\binom{m}{j}a_j^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n}a_n^{(n)}=0,$$
$$\binom{m}{0}a_1+\binom{m}{1}a_2'+\ldots+\binom{m}{j}a_{j+1}^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n-1}a_n^{(n-1)}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\binom{m}{0}a_i+\binom{m}{1}a_{i+1}'+\ldots+\binom{m}{j}a_{i+j}^{(j)}+\ldots+\binom{m}{n-i}a_n^{(n-i)}=0, \tag{5}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\binom{m}{0}a_{n-2}+\binom{m}{1}a_{n-1}'+\binom{m}{2}a_n''=0,$$
$$\binom{m}{0}a_{n-1}+\binom{m}{1}a_n'=0,$$

ausgefüllt werden müssen.

Für $m=1$ von diesen Relationen folgen die Relationen die in der Arbeit [5] bekommen sind.

Von den letzten drei Gleichungen erhalten wir nacheinander

$$a_{n-1}=-\binom{m}{1}a_n'=\binom{-m}{1}a_n',$$

$$a_{n-2} = -\binom{m}{1} a_{n-1}' - \binom{m}{2} a_n' = \frac{m(m+1)}{2} a_n'' = \binom{-m}{2} a_n'' \quad ,$$

$$a_{n-3} = -\binom{m}{1} a_{n-2}' - \binom{m}{2} a_{n-1}'' - \binom{m}{3} a_n''' = \binom{-m}{3} a_n'''.$$

Wenn wir jetzt

$$a_{i+1} = \binom{-m}{n-i-1} a_n^{(n-i-1)}$$

setzen, erhalten wir für a_i der $i+1$- Gleichung von (5)

$$a_i = -(\binom{m}{1} a_{i+1}' + \binom{m}{2} a_{i+2}'' + \ldots + \binom{m}{j} a_{i+j}^{(j)} + \ldots +$$

$$+ \binom{m}{n-i-1} a_{n-1}^{(n-i-1)} + \binom{m}{n-i} a_n^{(n-i)} \quad) =$$

$$= -(\binom{m}{1}\binom{-m}{n-i-1} + \binom{m}{2}\binom{-m}{n-i-2} + \ldots + \binom{m}{j}\binom{-m}{n-i-j} +$$

$$+ \ldots . + \binom{m}{n-i}) a_n^{(n-i)} = -(- \binom{m}{0}\binom{-m}{n-i} - \binom{m}{n-i}\binom{-m}{0} + \binom{m}{n-i}) a_n^{(n-i)} =$$

$$= \binom{-m}{n-i} a_n^{(n-i)}. \tag{6}$$

Diesfalls wird die Differentialgleichung (1) [1,4,6,7]

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{-m}{n-i} a_n^{(n-i)} y^{(i)} = 0. \tag{7}$$

Wenn wir mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die n Nullstellen des Polynoms $a_n(x)$ bezeichnen, können wir auffchreiben

$$a_n(n) = A_{nn} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = A_{nn} P_n(x), \tag{8}$$

wo

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

ist.

Wenn wir jetzt die Differrentialgleichung (7) mit A_{nn} diwidieren, erhalten wir, nach (8), die Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{-m}{n-i} P_n^{(n-i)}(x) y^{(i)} = 0. \tag{9}$$

Setzen wir weiter

$$P_n(x) = (x - x_n) P_{n-1}(x),$$
$$P_n^{(n-i)}(x) = (x - x_n) P_{n-1}^{(n-i)}(x) + (n-i) P_{n-1}^{(n-i-1)}(x)$$

wird die Differentialgleichung (9)

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{-m}{n-i} \left[(x - x_n) P_{n-1}^{(n-i)} + (n-i) P_{n-1}^{(n-i-1)} \right] y^{(i)} = 0. \tag{10}$$

Da

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{-m}{n-i} (x - x_n) P_{n-1}^{(n-i)} y^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \binom{-m}{n-i} (x - x_n) P_{n-1}^{(n-i)} y^{(i)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{-m}{n-i-1} (x - x_n) P_{n-1}^{(n-i-1)} y^{(i+1)},$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{-m}{n-i} (n-i) P_{n-1}^{(n-i-1)} y^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{-m}{n-i} (n-i) P_{n-1}^{(n-i-1)} y^{(i)} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{-m}{n-i-1} (-m-n+i+1) P_{n-1}^{(n-i-1)} y^{(i)}$$

kann die Differentialgleichug (10) in der folgenden Gestalt

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{-m}{n-i-1} P_{n-1}^{(n-i-1)} \left[(x - x_n) y' - (m+n-1) y \right]^{(i)} = 0$$

aufgeschrieben werden.

Wenn wir jetzt in dieser Differentialgleichung

$$(x-x_n)y'-(m+n-1)y=y_1$$

setzen, erhalten wir die Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{-m}{n-i-1}P_{n-1}^{(n-i-1)}y_1^{(i)}=0. \tag{11}$$

Setzt man hier

$$P_{n-1}(x)=(x-x_{n-1})P_{n-2}(x),$$

$$P_{n-1}^{(n-i-1)}=(x-x_{n-1})P_{n-2}^{(n-i-1)}+(n-i-1)P_{n-2}^{(n-i-2)}$$

wird die Differentialgleichung (11)

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{-m}{n-i-1}\left[(x-x_{n-1})P_{n-2}^{(n-i-1)}+(n-i-1)P_{n-2}^{(n-i-2)}\right]y_1^{(i)}=0. \tag{12}$$

Da

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{-m}{n-i-1}(x-x_{n-1})P_{n-2}^{(n-i-1)}y_1^{(i)}=\sum_{i=0}^{n-2}\binom{-m}{n-i-2}(x-x_{n-1})P_{n-2}^{(n-i-2)}y_1^{(i+1)},$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{-m}{n-i-1}(n-i-1)P_{n-2}^{(n-i-2)}y_1^{(i)}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\binom{-m}{n-i-2}(-m-n+i+2)P_{n-2}^{(n-i-2)}y_1^{(i)}$$

kann die letzte Differentialgleichung (12) in der folgenden Form

$$\sum_{i=0}^{n-2}\binom{-m}{n-i-2}P_{n-2}^{(n-i-2)}\left[(x-x_{n-1})y_1'+(m+n-2)y_1\right]^{(i)}=0. \tag{13}$$

aufgeschrieben werden.

Setzt man jetzt

$$(x-x_{n-1})y_1'-(m+n-2)y_1=y_2$$

wird die letzte Differentialgleichung (13)

$$\sum_{i=0}^{n-2}\binom{-m}{n-i-2}P_{n-2}^{(n-i-2)}y_2^{(i)}=0. \tag{14}$$

Wenn wir weiter

$$(x-x_{m-k+1})y_{k-1}'-(m+n-k)y_{k-1}=y_k$$

setzen, machen wir eine Voraussetzung dass für y_k die folgende Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n-k}\binom{-m}{n-i-k}P_{n-k}^{(n-i-k)}y_k^{(i)}=0 \tag{15}$$

erhalten wind.

Setzt man noch hier

$$P_{n-k}(x)=(x-x_{n-k})P_{n-k-1}(x),$$
$$P_{n-k}^{(n-i-k)}=(x-x_{n-k})P_{n-k-1}^{(n-i-k)}+(n-i-k)P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)},$$

wird die letzte Differentialgleichung (15)

$$\sum_{i=0}^{n-k}\binom{-m}{n-i-k}\left[(x-x_{n-k})P_{n-k-1}^{(n-i-k)}+(n-i-k)P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)}\right]y_k^{(i)}=0. \tag{16}$$

Da

$$\sum_{i=0}^{n-k}\binom{-m}{n-i-k}(x-x_{n-k})P_{n-k-1}^{(n-i-k)}y_k^{(i)}=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{-m}{n-i-k-1}(x-x_{n-k})P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)}y_k^{(i+1)},$$
$$\sum_{i=0}^{n-k}\binom{-m}{n-i-k}(n-i-k)P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)}y_k^{(i)}=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{-m}{n-i-k-1}(-m-n+i+k+1)P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)}y_k^{(i)},$$

kann die letzte Differentialgleichug (16) in der folgenden Form

$$\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{-m}{n-i-k-1}P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)}\left[(x-x_{n-k})y_k'-(m+n-k-1)y_k\right]^{(i)}=0 \tag{17}$$

aufgesehrieben werden.

Wenn wir jetzt

$$(x-x_{n-k})y_k'-(m+n-k-1)y_k=y_{k+1}$$

setzen, erhalten wir für y_{k+1} die Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{-m}{n-i-k-1}P_{n-k-1}^{(n-i-k-1)}y_{k+1}^{(i)}=0. \qquad (18)$$

Auf diese Weise, haben wir mit der Anwendung der matematische Induktion beweisen dass die Differentialgleichung (9) auf die lineare Differentialgleichungssystem der esten Ordnung

$$\begin{aligned}
&(x-x_n)y'-(m+n-1)y=y_1,\\
&(x-x_{n-1})y_1'-(m+n-2)y_1=y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(x-x_{n-k})y_k'-(m+n-k-1)y_k=y_{k+1}, \qquad (19)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(x-x_2)y_{n-2}'-(m+1)y_{n-2}=y_{n-1},\\
&(x-x_1)y_{n-1}'-my_{n-1}=0
\end{aligned}$$

sich reduziert.

Wenn wir diese Differentialgleichungen (19) nacheinander lösen, erhalten wir die allgemeine Polynomlösung der Differentialgleichung (9) in der folgende Gestalt.

$$\begin{aligned}
y&=A_n(x-x_n)^{m+n-1}+(x-x_n)^{m+n-1}\int(x-x_n)^{-m-n+2}y_1dx=\\
&=A_n(x-x_n)^{m+n-1}+A_{n-1}(x-x_n)^{m+n-1}\int\frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}}dx+\\
&+(x-x_n)^{m+n-1}\int\left[\frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}}\int\frac{y_2dx}{(x-x_{n-1})^{m+n-1}}\right]dx=\\
&=A_n(x-x_n)^{m+n-1}+A_{n-1}(x-x_n)^{m+n-1}\int\frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}}dx+\\
&+A_{n-2}(x-x_n)^{m+n-1}\int\left[\frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}}\int\frac{(x-x_{n-2})^{m+n-3}}{(x-x_{n-1})^{m+n-1}}dx\right]dx+
\end{aligned}$$

$$+\left(x-x_n\right)^{m+n-1}\int\left[\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-2}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\left(\frac{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-3}}{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-1}}\int\frac{y_3\,dx}{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-2}}\right)dx\right]dx=$$

$$=\ldots=A_n(x-x_n)^{m+n-1}+A_{n-1}(x-x_n)^{m+n-1}\int\frac{(x-x_{n-1})^{m+n-2}}{(x-x_n)^{m+n}}dx+$$

$$+\ldots+A_3\left(x-x_n\right)^{m+n-1}\times$$

$$\times\int\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-2}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\frac{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-3}}{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-1}}\int\frac{\left(x-x_{n-3}\right)^{m+n-4}}{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-2}}\int\ldots$$

$$\ldots\int\frac{\left(x-x_5\right)^{m+4}}{\left(x-x_6\right)^{m+6}}\int\frac{\left(x-x_4\right)^{m+3}}{\left(x-x_5\right)^{m+5}}\int\frac{\left(x-x_3\right)^{m+2}}{\left(x-x_4\right)^{m+4}}dx^{n-3}+ \qquad (20)$$

$$+A_2\left(x-x_n\right)^{m+n-1}\times$$

$$\times\int\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-2}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\frac{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-3}}{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-1}}\int\frac{\left(x-x_{n-3}\right)^{m+n-4}}{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-2}}\int\ldots$$

$$\ldots\int\frac{\left(x-x_4\right)^{m+3}}{\left(x-x_5\right)^{m+5}}\int\frac{\left(x-x_3\right)^{m+2}}{\left(x-x_4\right)^{m+5}}\int\frac{\left(x-x_2\right)^{m+1}}{\left(x-x_3\right)^{m+3}}dx^{n-2}+$$

$$+A_1\left(x-x_n\right)^{m+n-1}\times$$

$$\times\int\frac{\left(x-x_{n1}\right)^{m+n-1}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\frac{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-2}}{\left(x-x_n\right)^{m+n}}\int\frac{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-3}}{\left(x-x_{n-1}\right)^{m+n-1}}\int\frac{\left(x-x_{n-3}\right)^{m+n-4}}{\left(x-x_{n-2}\right)^{m+n-2}}\int\ldots$$

$$\ldots\int\frac{\left(x-x_3\right)^{m+2}}{\left(x-x_4\right)^{m+4}}\int\frac{\left(x-x_2\right)^{m+1}}{\left(x-x_3\right)^{m+32}}\int\frac{\left(x-x_1\right)^{m}}{\left(x-x_2\right)^{m+2}}dx^{n-1},$$

wo $A_i, i=1,2,\ldots,n$ beliebige Konstanten sind.

Beispiele: 1° Die Differentialgleichungen

$$(x-x_1)(x-x_2)y''-m(2x-x_1-x_2)y'+m(m+1)y=0,$$
$$(x-x_1)^2y''-2m(x-x_1)y'+m(m+1)y=0$$

besitzen allgemeine Lösungen

$$y=C_1\left(x-x_1\right)^{m+1}+C_2\left(x-x_2\right)^{m+1},$$
$$y=C_1\left(x-x_1\right)^{m+1}+C_2\left(x-x_2\right)^{m}.$$

Für $m=1, x_1 = i, x_2 = -i$ und $x_1 = 1, x_2 = -1$ der ersten diesen Differentialgleichngen werden die zitirten Differentialgleichungen in [2] erhalten.

2^o Die Differentialgleichungen

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)y'''-$$
$$-m\left[(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_2)(x-x_3)\right]y''+$$
$$+m(m+1)(3x-x_1-x_2-x_3)y'-m(m+1)(m+2)y=0,$$

$$(x-x_1)^2(x-x_2)y'''-$$
$$-m\left[(x-x_1)^2+2(x-x_1)(x-x_2)\right]y''+$$
$$+m(m+1)\left[2(x-x_1)+(x-x_2)\right]y'-m(m+1)(m+2)y=0,$$

$$(x-x_1)^3y'''-3m(x-x_1)^2+$$
$$+3m(m+1)(x-x_1)y'-m(m+1)(m+2)y=0$$

besietzen allgemeine Lösungen

$$y=C_1(x-x_1)^{m+2}+C_2(x-x_2)^{m+2}+C_3(x-x_3)^{m+2},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+2}+C_2(x-x_1)^{m+1}+C_3(x-x_2)^{m+2},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+2}+C_2(x-x_1)^{m+1}+C_3(x-x_1)^{m}.$$

Für $m=1, x_1 = x_2 = 0, x_3 = -1$ der ersten diesen Differentialgleichungen wird die zitirten Differentialgleichung in [2] erhalten.

3^o Die Differentialgleichungen

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)y^{IV}-$$
$$-m\left[(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)+\right.$$
$$\left.+(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)+(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\right]y'''+$$
$$+m(m+1)\left[(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)(x-x_4)+\right.$$
$$\left.+(x-x_2)(x-x_3)+(x-x_2)(x-x_4)+(x-x_3)(x-x_4)\right]y''-$$

$$-m(m+1)(m+2)(4x-x_1-x_2-x_3-x_4)y'+$$
$$+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

$$(x-x_1)^2(x-x_2)(x-x_3)y^{IV}-m\big[2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)+$$
$$+(x-x_1)^2(x-x_2)+(x-x_1)^2(x-x_3)]y'''+m(m+1)[2(x-x_1)(x-x_2)+$$
$$+2(x-x_1)(x-x_3)+(x-x_1)^2+(x-x_2)(x-x_3)\big]y''-$$
$$-m(m+1)(m+2)(4x-2x_1-x_2-x_3)y'+$$
$$+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

$$(x-x_1)^2(x-x_2)^2y^{IV}-$$
$$-2m[(x-x_1)(x-x_2)^2+(x-x_1)^2(x-x_2)]y'''+$$
$$+m(m+1)[(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+4(x-x_1)(x-x_2)]y''-$$
$$-m(m+1)(m+2)[2(x-x_1)+2(x-x_2)]y'+$$
$$+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

$$(x-x_1)^3(x-x_2)y^{IV}-$$
$$-m[(x-x_1)^3+3(x-x_1)^2(x-x_2)]y'''+$$
$$+m(m+1)[3(x-x_1)^2+3(x-x_1)(x-x_2)]y''-$$
$$-m(m+1)(m+2)[3(x-x_1)+(x-x_2)]y'+$$
$$+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

$$(x-x_1)^4y^{IV}-4m(x-x_1)^3y'''+6m(m+1)(x-x_1)^2y''-$$
$$-4m(m+1)(m+2)(x-x_1)y'+m(m+1)(m+2)(m+3)y=0,$$

besiettzen allgemeine Lösungen

$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_2)^{m+3}+C_3(x-x_3)^{m+3}+C_4(x-x_4)^{m+3},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_1)^{m+2}+C_3(x-x_2)^{m+3}+C_4(x-x_3)^{m+3},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_1)^{m+2}+C_3(x-x_2)^{m+3}+C_4(x-x_2)^{m+2},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_1)^{m+2}+C_3(x-x_1)^{m+1}+C_4(x-x_2)^{m+3},$$
$$y=C_1(x-x_1)^{m+3}+C_2(x-x_1)^{m+2}+C_3(x-x_1)^{m+1}+C_4(x-x_1)^{m}.$$

L I T E R A T U R

[1] Angelesko M.: Sur certenes équations différentielles completement intégrables, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris 1921, t.172, pp. 40-41.
[2] Э Камке: Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, стр.466 урав. 2.227, стр.475 урав. 2.240а, стр. 545 урав. 3.71(1961) Москва.
[3] Пиперевски Боро М.: Полиномни решенија на една класа линеарни диференцијални равенки и нивна примена, докторска дисертација (1982) Скопје.
[4] Popov B.S.: O jednoj diferencijalnoj jednačini, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu,serija: Matematika i fizika, N°68 (1961)
[5] Šapkarev I. A. : Sur une équation différentielle linéaire d'ordre *n* dont la solution générale est une polynôme de n-ème degré, Matematički vesnik 1(16) 1964.
[6] Šapkarev Ilija A. : Polynome mit Grade sukzessiven natürlichen Zahlen als partikuläre Lösungen einer Klasse der linearen Differentialgleichungen, MANU, Contributions, XII, 2 - Section of Mathematical and Technical Sciences (1991) Skopje.
[7] Šapkarev Ilija A.: Eine Anwendung der Adjungierten linearen Differentialgleichung für die Konstruktion der Polynomlösungen, MANU, Contributions, VII 2-Section of Mathematical and Technical Sciences (1986) Skopje.

Илија А. Шапкарев

ЗА ЕДНА РЕДУКТИБИЛНА ХОМОГЕНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ЧИЈ ОПШТ ИНТЕГРАЛ Е ПОЛИНОМ.

Резиме

Во трудот се разгледува линеарната диференцијална равенка (1) чии коефициенти се полиноми. Степенот на секој од овие полиномни коефициенти е еднаков со изводот на непознатата функција пред кој тој се наоѓа.

Со *m* последователни диференцирања од диференцијалната равенка (1) се добива диференцијалната равенка (3) од ред $m+n$ која треба да се напише во вид (4).

Потребни и доволни услови за диференцијалната равенка (1) да има *n* полиномни решенија од степени $m,m+1,...,m+n-1$ се релациите (5) кои се добиваат од диференцијалната равенка (4). Со помош на овие релации диференцијалната равенка (1) може да се напише во вид (7). Понатака се покажува дека диференцијалната равенка (7) се сведува на системот линеарни диференцијални равенки од прв ред (19).

Со последователното решавање на овој систем се добива општото полиномно решение на диференцијалната равенка (1) определено со формулата (20).

На крајот се дадени неколку примери.