8 МСДР 2004, (1 - 14)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА НЕКОИ ПОСЛАБИ СПЕЦИЈАЛНИ УСЛОВИ ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТ НА ЕДНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ТРЕТ РЕД ЧИЈ ОПШТ ИНТЕГРАЛ Е ПОЛИНОМ

Илија А. Шапкарев

Апстракт: Во трудот се разгледува хомогена диференцијална равенка од трет ред со полиномни коефициенти. Во него се добиваат послаби доволни услови за егзистенција на општо полиномно решение. При тие услови диференцијалната равенка се редуцира на систем од две линеарни диференцијални равенки, од кои едната е од прв ред, а другата е од втор ред. Со последователно решавање на овие две диференцијални равенки се добива општото полиномно решение на разгледуваната диференцијална равенка.

Клучни зборови: Диференцијални равенки, општо решение, полиномно решение, егзистенцијални услови, редуктибилна диференцијална равенка.

0. Предмет на овој труд е диференцијалната равенка

$$\alpha y''' + \beta y'' + \gamma y' + \delta y = 0, \tag{0.1}$$

каде $\alpha=\alpha(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3$, $\beta=\beta(x)=B_0+B_1x+B_2x^2$, $\gamma=\gamma(x)=C_0+C_1x$, $\delta=\delta(x)=D_0$, а A_i, $i=0,1,2,3$, ($A_3 \neq 0$), B_i, $i=0,1,2$, C_i, $i=0,1$, D_0 се константи.

Во [1] се добиени некои специјални услови за диференцијалната равенка (0.1) да биде редуктибилна на систем од три линеарни диференцијални равенки од прв ред и да има општо решение полином. При тоа е добиена и формулата со која е определен овој полином.

Ние, во овој труд, добиваме послаби специјални услови за редуктибилност на диференцијалната равенка (0.1) на систем од две линеарни диференцијални равенки, од кои едната е од прв ред, а другата е од втор ред, и која има општо решение полином. Потоа е добиена формулата со која се определува полиномот.

За таа цел, ја диференцираме диференцијалната равенка (0.1) m пати, каде што m е природен број и ја добиваме диференцијалната равенка од ред m+3:

$$\begin{aligned}
&\alpha\, y^{(m+3)} + \left[\binom{m}{1}\alpha' + \binom{m}{0}\beta \right] y^{(m+2)} + \\
&+\left[\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma \right] y^{(m+1)} + \\
&+\left[\binom{m}{3}\alpha''' + \binom{m}{2}\beta'' + \binom{m}{1}\gamma' + \binom{m}{0}\delta \right] y^{(m)} = 0
\end{aligned} \tag{0.2}$$

Како што е познато, види [2,3], потребен и доволен услов за диференцијалната равенка (0.1) да има полиномно решение од степен m, е да биде задоволена равенката

$$\binom{t}{3}\alpha''' + \binom{t}{2}\beta'' + \binom{t}{1}\gamma' + \binom{t}{0}\delta = 0 \tag{0.3}$$

за $t=m$, каде што m е најмалиот природен број со таа особина. Во зависност од природата на коефициентите од диференцијалната равенка (0.2), посебно ќе ги разгледаме следните случаи:

1. $\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma \neq 0;$
2. $\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma = 0, \qquad \binom{m}{1}\alpha' + \binom{m}{0}\beta \neq 0;$
3. $\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma = 0, \qquad \binom{m}{1}\alpha' + \binom{m}{0}\beta = 0.$

1. Во овој случај диференцијалната равенка (0.2) станува

$$\alpha\, z''+\left[\binom{m}{1}\alpha'+\binom{m}{0}\beta\right]z'+\left[\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma\right]z=0, \qquad (1.1)$$

каде што $y^{(m+1)}=z$.

Ставајќи понатаму

$$\alpha=\frac{1}{F}(Ax^2+Bx+C)\left[\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma\right],$$
$$\binom{m}{1}\alpha'+\binom{m}{0}\beta=\frac{1}{F}(Dx+F)\left[\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma\right], \qquad (1.2)$$

каде што A, B, C, D, E и $F\neq 0$ се константи, диференцијалната равенка (1.1), после делењето со коефициентот пред z, може да се напише во вид

$$(Ax^2+B+C)z''+(Dx+E)z'+Fz=0. \qquad (1.3)$$

Бидејќи

$$\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma=Gx+H, \qquad (1.4)$$

каде што

$$G=3m(m\text{-}1)A_3+2mB_2+C_1\,,\quad H=m(m\text{-}1)A_2+mB_1+C_0\,, \qquad (1.5)$$

од првата равенка од равенките (1.2) добиваме:

$$(A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0)F=AGx^3+(AH+BG)x^2+(BH+CG)x+CH. \qquad (1.6)$$

Значи, за определување на коефициентите A, B, C, ги имаме равенките:

$$A_3\,F=AG,\qquad A_2\,F=AH+BG,$$
$$A_1\,F=BH+CG,\qquad A_0\,F=CH. \qquad (1.7)$$

Од овие равенки, последователно добиваме:

$$A=\frac{A_3}{G}F, \qquad B=\frac{A_2G-A_3H}{G^2}F,$$
$$C=\frac{A_1G^2-A_2GH+A_3H^2}{G^3}F, \tag{1.8}$$
$$A_3\left(\frac{H}{G}\right)^3-A_2\left(\frac{H}{G}\right)^2+A_1\frac{H}{G}-A_0=0.$$

Од втората равенка од (1.2), во врска со (1.4), го имаме идентитетот

$$[(3mA_3+B_2)x^2+(2mA_2+B_1)x+mA_1+B_0]F=$$
$$=(DGx^2+(DH+EG)x+EH) \tag{1.9}$$

од кој, за определување на коефициентите D и E, ги добиваме равенките:

$$DG=(3mA_3+B_2)F,$$
$$DH+EG=(2mA_2+B_1)F, \tag{1.10}$$
$$EH=(mA_1+B_0)F.$$

Од овие равенки последователно добиваме:

$$D=\frac{3mA_3+B_2}{G}F,$$
$$E=\frac{(2mA_2+B_1)G-(3mA_3+B_2)H}{G^2}F, \tag{1.11}$$
$$(3mA_3+B_2)\left(\frac{H}{G}\right)^2-(2mA_2+B_1)\frac{H}{G}+(mA_1+B_0)=0.$$

Со x_1 и x_2 да ги означиме нулите на полиномот Ax^2+Bx+C. Во тој случај, како што е познато, потребен и доволен услов за диференцијалната равенка (1.3) да има две полиномни решенија од степени n-1 и $n+k$-1, каде што $n>1$ и k се природни броеви, е да бидат задоволени релациите (види [4]):

$$A(n-1)^2+(D-A)(n-1)+F=0,$$
$$(2n+k-3)A+D=0, \tag{1.12}$$
$$[(n+k-r-2)x_1+(n+r-1)x_2]A-E=0, \quad r=0, 1, 2, ..., n-1.$$

Од првата равенка од (1.12), во врска со првите равенки од (1.8) и (1.11), добиваме:

$$A_3(n-1)^2+[(3m-1)A_3+B_2](n-1)+G=0. \tag{1.13}$$

Со замената на G од првата равенка од (1.5) во последнава равенка (1.13), ја добиваме равенката

$$(3m^2+n^2+3mn-6m-3n+2)A_3+(2m+n-1)B_2+C_1=0. \tag{1.14}$$

Од втората равенка од (1.12), со замената на A и D од првите равенки од (1.8) и (1.11) наоѓаме

$$(3m+2n+k-3)A_3+B_2=0. \tag{1.15}$$

Сега, од равенката (1.14), во врска со (1.15), за C_1 имаме

$$C_1=[m(3m+4n+2k-3)+(n-1)(m+k-1)]A_3. \tag{1.16}$$

Двете нули x_1 и x_2 на полиномот Ax^2+Bx+C од (1.6) се гледа дека се нули и на полиномот $\alpha(x)$. Третата негова нула, да ја означиме со x_3, во врска со (1.6) и со четвртата равенка од (1.8), ја задоволува равенката

$$G\,x_3+H=0. \tag{1.17}$$

Од третата равенка од (1.12), во врска со првата од (1.8) и втората од (1.11), добиваме

$$[(n+k-r-2)\,x_1+(n+r-1)\,x_2]A_3G-(2mA_2+B_1)G+(3mA_3+B_2)H=0.$$

Од оваа равенка, во врска со двете равенки (1.15) и (1.17) и со примена на Виетовите правила на полиномот $\alpha(x)$, за B_1 добиваме

$$B_1=[(2m+n+k-r-2)x_1+(2m+n+r-1)x_2+(2m+2n+k-3)x_3]A_3. \tag{1.18}$$

Од првата равенка од (1.5), во врска со двете равенки (1.15) и (1.16) за G добиваме

$$G=(n-1)(n+k-1)A_3 \tag{1.19}$$

а од втората равенка од (1.5), во врска со (1.17), (1.18), (1.19) и со примената на Виетовите правила на полиномот $\alpha(x)$, за C_0 добиваме

$$C_0=-[m(m+n+k-r-1)x_1+m(m+n+r)x_2+(m+n-1)(m+n+k-1)x_3]A_3. \qquad (1.20)$$

Од третата равенка од (1.11), во врска со (1.17), ја добиваме равенката

$$(3mA_3+B_2)x_3^2+(2mA_2+B_1)x_3+mA_1+B_0=0,$$

од која, со примена на Виетовите правила на полиномот $\alpha(x)$, во врска со равенките (1.15) и (1.18) за B_0 добиваме

$$B_0=-[mx_1x_2+(m+n+k-r-2)x_1x_3+(m+n+r-1)x_2x_3]A_3. \qquad (1.21)$$

Од равенката (0.3) за $t=m$, во врска со равенките (1.15) и (1.16), за D_0 добиваме

$$D_0=-m(m+n)(m+n+k)\, A_3. \qquad (1.22)$$

Сега диференцијалната равенка (0.1) може да се запише во вид

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)y'''-\\&-\{(3m+2n+k-3)x^2-[(2m+n+k-r-2)x_1+(2m+n+r-1)x_2+\\&+(2m+2n+k-3)x_3]x+[mx_1\,x_2+(m+n+k-r-2)\,x_1\,x_3\;+\\&+(m+n+r-1)\,x_2\,x_3]\}y''+\\&+\{[m(3m+4n+2k-3)+(n-1)(n+k-1)]x-[m(m+n+k-r-1)\,x_1+\\&+m(m+n+r)\,x_2+(m+n-1)(m+n+k-1)\,x_3]\}y'-\\&-m(m+n)(m+n+k)y=0\end{aligned} \qquad (1.23)$$

или уште во вид

$$\begin{aligned}&(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)y'''-\\&-[m(x-x_1)(x-x_2)+(m+n+k-r-2)(x-x_1)(x-x_3)+\\&+(m+n+r-1)(x-x_2)(x-x_3)]y''+\\&+[m(m+n+k-r-1)(x-x_1)+m(m+n+r)(x-x_2)+\\&+(m+n-1)(m+n+k-1)(x-x_3)]y'-\\&-m(m+n)(m+n+k)y=0.\end{aligned}$$

Со прегрупирање на членовите од оваа равенка ја добиваме диференцијалната равенка

$(x-x_3)\{(x-x_1)(x-x_2)\, y''-[(m+n+k-r-1)(x-x_1)+(m+n+r)(x-x_2)]y'+$
$+(m+n)(m+n+k)y\}'-m\{(x-x_1)(x-x_2)y''-$
$-[(m+n+k-r-1)(x-x_1)+(m+n+r)(x-x_2)]y'+(m+n)(m+n+k)y\}=0$

која се редуцира на системот од двете линеарни диференцијални равенки

$$(x-x_1)(x-x_2)\, y''-[(m+n+k-r-1)(x-x_1)+(m+n+r)(x-x_2)]y'+ \\ +(m+n)(m+n+k)y=u, \qquad (1.24) \\ (x-x_3)u'-mu=0.$$

Општото решение на втората диференцијална од овие равенки (1.24) е

$$u=K_3(x-x_3)^m, \qquad (1.25)$$

каде што K_3 е произволна константа, а првата равенка од (1.24), во врска со (1.25) станува

$$(x-x_1)(x-x_2)\, y''-[(m+n+k-r-1)(x-x_1)+(m+n+r)(x-x_2)]y'+ \\ +(m+n)(m+n+k)y= K_3(x-x_3)^m. \qquad (1.26)$$

Соодветната хомогена равенка од оваа диференцијална равенка има општо решение, види [4],

$$y= K_1^* y_1+ K_2^* y_2 \qquad (1.27)$$

каде што

$$y_1 = (x-x_1)^{m+n+r+1}(x-x_2)^{m+n+k-r}[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r}]^{(m+n)},$$
$$y_2 = (x-x_1)^{m+n+r+1}(x-x_2)^{m+n+k-r} \times$$
$$\times[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r}\int(x-x_1)^{r}(x-x_2)^{k-r-1}dx]^{(m+n)}$$

се полиноми од степен m+n и m+n+k соодветно, а K_1^* и K_2^* се константи.

За да го добиеме општото решение на нехомогената диференцијална равенка (1.26), со примена на Лагранжовата метода на варијација на константи од (1.27) за функциите $K_1^*(x)$ и $K_2^*(x)$, добиваме (види [5,7])

$$K_1^*(x) = K_3 \int \frac{(x-x_3)^m y_2}{(x-x_1)(x-x_2)(y_1' y_2 - y_1 y_2')} dx + K_1,$$

$$K_2^*(x) = K_3 \int \frac{(x-x_3)^m y_1}{(x-x_1)(x-x_2)(y_1' y_2 - y_1 y_2')} dx + K_2,$$

каде што K_1 и K_2 се произволни константи.

Сега општото решение на диференцијалната равенка (1.26) ќе биде

$$y = K_1 y_1 + K_2 y_2 + K_3 y_3 \tag{1.29}$$

каде што

$$y_3 = y_1 \int \frac{(x-x_3)^m y_2}{(x-x_1)(x-x_2)(y_1' y_2 - y_1 y_2')} dx - \\ - y_2 \int \frac{(x-x_3)^m y_1}{(x-x_1)(x-x_2)(y_1' y_2 - y_1 y_2')} dx. \tag{1.30}$$

Бидејќи

$y_1' y_2 - y_1 y_2' = (x-x_1)^{m+n+r}(x-x_2)^{m+n+k-r-1}$,

ќе биде

$$y_3 = (x-x_1)^{m+n+r+1}(x-x_2)^{m+n+k-r}\{[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r}]^{(m+n)} \times \\ \times \int (x-x_3)^m [(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r} \int (x-x_1)^r (x-x_2)^{k-r-1} dx]^{(m+n)} dx - \\ - [(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r} \int (x-x_1)^r (x-x_2)^{k-r-1} dx]^{(m+n)} \times \\ \times \int (x-x_3)^m [(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-k+r}]^{(m+n)} dx. \tag{1.31}$$

Лесно може да се види дека функцијата $y_3(x)$, определена со формулата (1.31) е полином од степен m.

2. Во овој случај, диференцијалната равенка (0.1) има две полиномни решенија со степени m и m+1 соодветно, а нејзините коефициенти ги задоволуваат релациите

$$\binom{m}{3}\alpha'''+\binom{m}{2}\beta''+\binom{m}{1}\gamma'+\binom{m}{0}\delta=0\,,$$

$$\binom{m}{2}\alpha''+\binom{m}{1}\beta'+\binom{m}{0}\gamma=0\,. \qquad (2.1)$$

Од овие две релации последователно добиваме

$$\gamma=-\binom{m}{2}\alpha''-\binom{m}{1}\beta',$$

$$\delta=2\binom{m+1}{3}\alpha'''+\binom{m+1}{2}\beta''. \qquad (2.2)$$

Сега диференцијалната равенка (0.2) станува

$$\alpha y^{(m+3)}+(m\alpha'+\beta)y^{(m+2)}=0,$$

од каде добиваме

$$y^{(m+2)}=\alpha^{-m}e^{-\int\frac{\beta}{\alpha}dx}.$$

За $y(x)$ да биде полином од степен $m+n$, $n>1$ е природен број, треба да биде

$$\left(\alpha^{-m}e^{-\int\frac{\beta}{\alpha}dx}\right)^{(n-1)}=0.$$

Од овде следува

$$\alpha^{-m}e^{-\int\frac{\beta}{\alpha}dx}=P_{n-2}(x),$$

каде што $P_{n-2}(x)$ е полином од степен n-2, од каде за $\beta(x)$ се добива

$$\beta(x) = -m\alpha' - \alpha\frac{P_{n-2}'}{P_{n-2}}. \qquad (2.3)$$

Ако ставиме

$P_{n-2}(x)=(x-x_3^0)^{n-2}, \quad P_{n-2}'(x)=(n-2)(x-x_3^0)^{n-3}$

каде што x_3^0 е нула на полиномот $\alpha(x)$, и ако со x_1^0 и x_2^0 ги означиме другите две нули на полиномот $\alpha(x)$, со примена на Виетовите правила за $\beta(x)$, имаме

$$\beta(x) = -m\alpha' - \frac{n-2}{x-x_3^0}\alpha = -[(m+n-2)(x-x_1^0)(x-x_2^0) +$$
$$+\ m(x-x_1^0)(x-x_3^0) + m(x-x_2^0)(x-x_3^0)]A_3.$$

За $\gamma(x)$ и δ од (2.2) во врска со (2.3) наоѓаме последователно

$$\gamma(x) = -\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}[m\alpha' + \frac{n-2}{x-x_3^0}\alpha] =$$
$$= [m(m+n-1)(x-x_1^0) + m(m+n-1)(x-x_2^0) + m(m+1)(x-x_3^0)]A_3,$$
$$\delta = 2\binom{m+1}{3}\alpha''' + \binom{m+1}{2}[-m\alpha''' - (n-2)2A_3] = -m(m+1)(m+n)A_3.$$

Сега диференцијалната равенка (0.1) станува

$(x- x_1^0)(x- x_2^0)(x- x_3^0)y'''-$
$-[(m+n-2)(x- x_1^0)(x- x_2^0)+m(x- x_1^0)(x- x_3^0)+$
$+m(x- x_2^0)(x- x_3^0)]y''+m[(m+n-1)(x- x_1^0)+$
$(m+n-1)(x\ x_2^0)+(m+1)(x- x_3^0)]y'-m(m+1)(m+n)y=0$

и се редуцира на системот линеарни диференцијални равенки од прв ред

$(x -x_3^0)y'-(m+n)y=u_1,$
$(x- x_2^0)\ u_1\ '-(m+1)\ u_1= u_2,$
$(x- x_1^0)\ u_2' -m\ u_2=0.$

Со последователно решавање на овој систем, имаме

$$u_2 = K_1(x - x_1^{\,0})^m,$$

$$u_1 = (x - x_2^{\,0})^{m+1}[K_2 + K_1\int \frac{(x - x_1^{\,0})^m}{(x - x_2^{\,0})^{m+2}}dx],$$

$$y = (x - x_3^{\,0})^{m+n}[K_3 + K_2\int \frac{(x - x_2^{\,0})^{m+1}}{(x - x_3^{\,0})^{m+n+1}}dx +$$

$$+ K_1\int \frac{(x - x_2^{\,0})^{m+1}}{(x - x_3^{\,0})^{m+n+1}}\int \frac{(x - x_1^{\,0})^m}{(x - x_2^{\,0})^{m+2}}dx\, dx].$$

При тоа, K_1, K_2, K_3 се произволни константи.

3. Сега од релациите

$$\binom{m}{3}\alpha''' + \binom{m}{2}\beta'' + \binom{m}{1}\gamma' + \binom{m}{0}\delta = 0,$$

$$\binom{m}{2}\alpha'' + \binom{m}{1}\beta' + \binom{m}{0}\gamma = 0, \qquad (3.1)$$

$$\binom{m}{1}\alpha' + \binom{m}{0}\beta = 0,$$

последователно добиваме:

$$\beta = -m\alpha', \qquad \gamma = \binom{m+1}{2}\alpha'', \qquad \delta = \binom{m+2}{3}\alpha''' \qquad (3.2)$$

Диференцијалната равенка (0.1), во врска со (3.2) може да се запише во вид

$$\alpha y''' - m\alpha' y'' + \binom{m+1}{2}\alpha'' y' - \binom{m+2}{3}\alpha''' y = 0. \qquad (3.3)$$

Со x_1^*, x_2^*, x_3^* да ги означиме нулите на полиномот $\alpha(x)$. Тогаш диференцијалната равенка (3.3) може да се напише во вид

$$\begin{aligned}&(x- x_1^*)(x- x_2^*)(x- x_3^*)y'''-\\ &-m[(x- x_1^*)(x- x_2^*)+(x- x_1^*)(x- x_3^*)+(x- x_2^*)(x- x_3^*)]y''+\\ &+m(m+1)[(x- x_1^*)+(x- x_2^*)+(x- x_3^*)]y'-\\ &-m(m+1)(m+2)y=0\end{aligned} \qquad (3.4)$$

и се редуцира на системот диференцијални равенки од прв ред, види [6]

$$\begin{aligned}
&(x- x_3^*)y'-(m+2)y=v_1,\\
&(x -x_2^*)\, v_1'-(m+1)v_1 =v_2, \qquad\qquad (3.5)\\
&(x -x_1^*)\, v_2'- mv_2 =0.
\end{aligned}$$

Со решавањето на овој систем (3.5) последователно добиваме

$$v_2 = C_1^*(x-x_1^*)^m,$$

$$v_1 = (x-x_2^*)^{m+1}[C_2^* + C_1^*\int\frac{(x-x_3^*)^m}{(x-x_2^*)^{m+2}}dx],$$

$$y = (x-x_3^*)^{m+2}[C_3^* + C_2^*\int\frac{(x-x_2^*)^{m+1}}{(x-x_1^*)^{m+3}}dx + \qquad (3.6)$$

$$+ C_1^*\int\frac{(x-x_2^*)^{m+1}}{(x-x_1^*)^{m+3}}\int\frac{(x-x_3^*)^m}{(x-x_2^*)^{m+2}}dx\, dx].$$

При тоа, C_1*, C_2*, C_3*, се произволни константи.

Да забележиме дека десната страна од третата формула од (3.6) претставува полином од степен $m+2$. Значи, општото решение на диференцијалната равенка (0.1) е полином од степен $m+2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шапкарев И. А.: Полином како општо решение на една хомогена диференцијална равенка од трет ред, Зборник на трудови, Втор конгрес на математичарите и информатичарите на Македонија, стр. 105-109 (2000) Охрид.

[2] Пиперевски Б. М.: Егзистенција и конструкција на полиномно решение на една класа линеарни диференцијални равенки од трет ред, Зборник на трудови на ЕТФ (1996) Скопје.

[3] Пиперевски Б. М.: Полиномни решенија на една класа линеарни диференцијални равенки и нивна примена, докторска дисертација, Математички факултет (1982) Скопје.

[4] Shapkarev I. A., Piperevski B. M., Hadzieva E. J.: On Some Special General Integrals of a Linear Differential Equations of Second Order, Mathematica Balkanica, Vol. 18, 2004, Fasc. 3-4., Sofia, p. 453-459

[5] Шапкарев И. А.: Математика III, Елементарна теорија на редови и на диференцијални равенки, стр. 250, Универзитет ”Св. Кирил и Методиј” (1991) Скопје.

[6] Шапкарев И. А.: За една редуктибилна хомогена линеарна диференцијална равенка чиј општ интеграл е полином, Седми македонски симпозиум по диференцијални равенки, Зборник на трудови, стр. 73-84 (2003) Охрид.

[7] Степанов В. В.: Курс диференциальных уравнений , стр. 191, Москва (1945) Ленинград.

Ilija A. Schapkarev

Über einige schwächere spezielle Bedingungen für die Reduktion einer linearen Differentialgleichung der dritten Ordnung deren allgemeines Integral ein Polynom ist

Zusammenfassung

In der Arbeit wird die Differentialgleichung der dritten Ordnung (0.1) mit polinomische Koeffizienten betrachtet. Durch Differenzieren und Dividieren werden die Bedingungen erhalten, so dass die betrachtete Differentialgleichung (0.1) drei Polynomlösungen besitzt. Von diesen Bedingungen werden die Koeffizienten der ursprüngliche Differentialgleichung (0.1) mit den Formeln (1.15), (1.16), (1.18), (1.20), (1.21), und (1.22) erhalten. Jetzt wird die Differentialgleichung (0.1) in der Form (1.23) aufgeschhrieben. Weiter wird gezeigt dass die erhaltene Differentialgleichung (1.23) auf ein entsprechendes System der zwei Differentialgleichungen (1.24) reduziert warden kann. Mit nacheinander Auflösung dises System werden die drei Polynomlösungen y_1, y_2, y_3, der ursprüngliche Differentialgleichung (0.1) erhalten. Die Polynomlösungen y_1, y_2, y_3, werden mit den Formeln (1.28) und (1.30) gegeben.