8 МСДР 2004, (49 - 56)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА ЕДНА АРЕОЛАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОРИ РЕД

Борко Илиевски, Слаѓана Брсакоска
Природно–математички факутет – Скопје
e–mail: borkoi@iunona.pmf.ukim.edu.mk
e-mail: slaganak@iunona.pmf.ukim.edu.mk

ABSTRACT. It is known that the ordinary differential equation of II order $y'' + y = 0$ is basic for construction of the analytic theory of trigonometric functions. In this paper, we consider areolar differential equation of II order $\frac{\partial^2 w}{\partial \overline{z}^2} = \lambda \overline{w}$ (*). If we put $\lambda = -1$, than we can see some analogy between this two equations. So, the equation (*) could be basic for construction of so cold areolar trigonometry, but this is not the task for this paper. For areolar equations in which the unknown function is under the sighn of complex conjugation does not exist quadrature methods for solving them. That's why with method of areolar series,the solution of (*) is found and by using the cylindrical functions, we put the solution into a more concize form.

Ја проучуваме ареоларната равенка од втор ред :

$$\frac{\hat{d}^2 W}{d\overline{z}^2} = \lambda \overline{W} \qquad (\lambda \in C) \tag{1}$$

по непознатата функција $W = W(z) = U(x, y) + iV(x, y)$од комплексна променлива $z = x + iy$. При тоа

$$\frac{\hat{d}}{d\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2}$$

е т.н. операторен извод по $\overline{z} = x - iy$ или ареоларен извод, воведен од Колосов во 1909 година [1] , и

$$\frac{\hat{d}^2}{d\overline{z}^2} = \frac{\hat{d}}{d\overline{z}}\left(\frac{\hat{d}}{d\overline{z}}\right)$$

е ареоларен извод од втори ред.

Изразот

$$\hat{\int} ...d\bar{z}\,, \tag{3}$$

дефиниран со

$$\hat{\int} f(z)d\bar{z} = W(z) + \Phi(z)\,, \tag{3'}$$

при што

$$\frac{\hat{d}W}{d\bar{z}} = f(z)$$

и $\Phi = \Phi(z)$ е произволна аналитичка функција , се вика операторен интеграл по $\bar{z} = x - iy$.
Операциските правила за операторниот извод по $\bar{z}$ (2) , како и за операторниот интеграл по $\bar{z}$ (3) се дадени во монографијата на Г.Н.Положуй [2].

Во трудот [3] со метода на ареоларни редови , најдено е општо решение на ареоларната равенка (1) во облик:

$$\begin{aligned} W = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} \Bigg\{ & \frac{1}{(2n)!}\Big[\bar{z}^{2n} \underbrace{\int dz \int dz ... \int dz \int}_{2n} \Phi_1(z)dz + \\ & + \lambda z^{2n} \underbrace{\int d\bar{z} \int d\bar{z} ... \int d\bar{z} \int}_{2n+2} \overline{\Phi_1}(z)d\bar{z} \;\Big] + \\ & + \frac{1}{(2n+1)!}\Big[\bar{z}^{2n+1} \underbrace{\int dz \int dz ... \int dz \int}_{2n} \Phi_2(z)dz + \\ & + \lambda z^{2n+1} \underbrace{\int d\bar{z} \int d\bar{z} ... \int d\bar{z} \int}_{2n+2} \overline{\Phi_2}(z)d\bar{z} \;\Big] \Bigg\} \end{aligned} \tag{4}$$

при што $\Phi_1 = \Phi_1(z)$ и $\Phi_2 = \Phi_2(z)$ се произволни аналитички функции во улога на интеграциони константи .

Во оваа работа се обидуваме општото решение (4) да го запишеме во поедноставен облик.

Редот во (4) го запишуваме како збир на четири соодветни редови , потоа од првиот и третиот ред ги оделуваме членовите за $n = o$ и на крај во секој од четирите редови ставаме сумирањето да почнува од нулата со што добиваме дека

$$W=\Phi_1(z)+\bar{z}\Phi_2(z)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{2n+2}\bar{z}^{2n+2}}{(2n+2)!}\underbrace{\int dz\int dz\ldots\int dz\int}_{2n+2}\Phi_1(z)dz+$$

$$+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{2n}z^{2n}}{(2n)!}\underbrace{\int d\bar{z}\int d\bar{z}\ldots\int d\bar{z}\int}_{2n+2}\overline{\Phi_1}(z)d\bar{z}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{2n+2}\bar{z}^{2n+2}}{(2n+3)!}\underbrace{\int dz\int dz\ldots\int dz\int}_{2n+2}\Phi_2(z)dz+\tag{5}$$

$$+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{2n}z^{2n+1}}{(2n+1)!}\underbrace{\int d\bar{z}\int d\bar{z}\ldots\int d\bar{z}\int}_{2n+2}\overline{\Phi_2}(z)d\bar{z}$$

Ако ја искористиме формулата **Cauchy**

$$\underbrace{\int dz\int dz\ldots\int dz\int}_{k}\Phi(z)dz=\begin{cases}\frac{1}{(k-1)!}\int(z-\xi)^{k-1}\Phi(\xi)d\xi\ , k\geq 2\\ \int\Phi(\xi)d\xi \quad k=1\end{cases}\tag{6}$$

тогаш решението (5) добива облик

$$W=\Phi_1(z)+\bar{z}\Phi_2(z)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{2n+2}\bar{z}^{\ 2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\cdot$$

$$\int(z-\xi)^{2n+1}\Phi_1(\xi)d\xi+\lambda\sum_{n=o}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{2n}z^{2n}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\int\overline{(z-\xi)}^{\ 2n+1}\overline{\Phi_1}(\xi)d\bar{\xi}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{2n+2}\bar{z}^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\int(z-\xi)^{2n+1}\Phi_2(\xi)d\xi+$$

$$+\lambda\sum_{n=o}^{\infty}\frac{\left|\lambda\right|^{2n}z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\int\overline{(z-\xi)}^{2n+1}\overline{\Phi_2}(\xi)d\xi$$

односно

$$W=\Phi_1(z)+\bar{z}\Phi_2(z)+\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{2n+2}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+2)!\cdot(2n+1)!}\Phi_1(\xi)d\xi+$$

$$+\lambda\int\sum_{n=o}^{\infty}|\lambda|^{2n}z^{2n}\left(\bar{z}-\bar{\xi}\right)^{2n+1}\overline{\Phi_1}(\xi)d\bar{\xi}+$$

$$+\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{2n+3}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+3)!\cdot(2n+1)!}\Phi_2(\xi)d\xi+ \qquad (7)$$

$$+\lambda\int\sum_{n=o}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n+1}\left(\bar{z}-\bar{\xi}\right)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}\cdot\overline{\Phi_2}(\xi)d\bar{\xi}$$

Лесно се покажува дека четвртиот ред во (7) конвергира во секоја област што лежи во конечната комплексна рамнина.

Да ставиме

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n+1}\left(\bar{z}-\bar{\xi}\right)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2} \qquad (8)$$

За првата сума во (7) имаме

$$\bar{S}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\bar{z}^{2n+1}(z-\xi)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}$$

т.е.

$$\hat{\int}\bar{S}d\bar{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}\bar{z}^{2n+2}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+2)!\cdot(2n+1)!}$$

од каде што

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n+2}\bar{z}^{2n+2}(z-\xi)^{2n+1}}{(2n+2)!\cdot(2n+1)!}=|\lambda|^2\hat{\int}\bar{S}d\bar{z} \qquad (9)$$

За сумата на вториот ред во (7) , имаме:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^{2n}z^{2n}\left(\bar{z}-\bar{\xi}\right)^{2n+1}}{(2n)!\cdot(2n+1)!} \qquad (10)$$

На крај , за сумата на третиот ред во (7) имаме :

$$\overline{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2n} \overline{z}^{2n+1} (z-\xi)^{2n+1}}{[(2n+1)!]^2}$$

$$\hat{\int} \overline{S} d\overline{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2n} \overline{z}^{2n+2} (z-\xi)^{2n+1}}{(2n+2)! \cdot (2n+1)!}$$

$$\hat{\int} (\hat{\int} \overline{S} d\overline{z}) d\overline{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2n} \overline{z}^{2n+3} (z-\xi)^{2n+1}}{(2n+3)! \cdot (2n+1)!},$$

од каде што

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2n+2} \overline{z}^{2n+3} (z-\xi)^{2n+1}}{(2n+3)! \cdot (2n+1)!} = |\lambda|^2 \hat{\int} (\hat{\int} \overline{S} d\overline{z}) d\overline{z} \tag{11}$$

Така , согласно формулите (8) , (9) , (10) и (11) функцијата, (7) го добива поедноставниот облик

$$\begin{aligned} W &= \Phi_1(z) + \overline{z}\Phi_2(z) + \\ &+ |\lambda|^2 \int [\hat{\int} \overline{S} d\overline{z}] \Phi_1(\xi) d\xi + \lambda \int \frac{\hat{d}S}{dz} \cdot \overline{\Phi_1}(\xi) d\overline{\xi} \\ &+ |\lambda|^2 \int [\hat{\int} (\hat{\int} \overline{S} d\overline{z}) d\overline{z}] \Phi_2(\xi) d\xi + \lambda \int S \cdot \overline{\Phi_2}(\xi) d\overline{\xi} \end{aligned} \tag{12}$$

Сета оваа работа може да се формулира во следнава:

Теорема: *Ареоларната диференцијална равенка од втори ред* (1) *има општо решение од облик* (12) *при што* $\Phi_j = \Phi_j(z)$ *,* $j = \overline{1,2}$ *се произволни аналитички функции во улога на интеграциони константи . При тоа* $S = S(z, \overline{z}, \xi)$ *е сума на редот* (8) .

Забелешка 1 Ако во било кој од облиците(4) или (12) за општото решение на ареоларната диференцијална равенка од втори ред (1) како и во самата равенка , ставиме $\lambda = 0$, тогаш ги добиваме познатите т.н. бианалитички функции

$$W = f(z) + \overline{z} g(z)$$

на **Goursat** [4] , [5] .

Забелешка 2 Ако ставиме $\lambda=\alpha+i\beta$, тогаш лесно се проверува дека ареоларната диференцијална равенка (1) е комплексен запис на следниов систем од две парцијални диференцијални равенки од втор ред

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4(\alpha u+\beta v) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=4(\beta u+\alpha v) \end{cases} \tag{13}$$

Тоа значи дека

$$u=\operatorname{Re}W$$
$$v=\operatorname{Im}W$$

каде $W=W(z)$ е определена со формулата (12) (т.е.(4)), е решение на системот парцијални диференцијални равенки (13) .

Забелешка 3 Во трудот [6], С.Фемпл ги проучува неаналитичките функции $W=W(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ чие одстапување од аналитичност е аналитичка функција како решение на равенката

$B^2W = f(t) \quad f = f(t)$ – аналитичка функција.

При тоа,

$$B=2\frac{\hat{d}}{d\bar{z}} \tag{14}$$

е т.н. оператор на Билимовиќ [7], интерпретиран како мера на отстапување од аналитичност на неаналитичките функции.

Согласно врската (14) ареоларната диференцијална равенка од втор ред (1) добива облик

$$B^2W=4\lambda\overline{W} \ ,$$

поради што функциите $W=W(z)$, определени со (4) т.е. (12) можат да се интерпретираат како неаналитички функции чие што второ отстапување од аналитичност е “пропорционално” со нивната комплексно коњугирана вредност .

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г.В. Колосов : Об одном приложении теории функций комплесного переменного к плосной задаче математической теории упругости , Юргев , 1909

[2] Г.Н.Положий : Обопщение теории аналитических функций комплесного переменного , Киев , 1965

[3] B.Ilievski : Solution of the Areolar Equation $\frac{\hat{d}^2 W}{d\bar{z}^2} = \lambda\overline{W}$ by Double Series , IX Conference on Applied Mathematics,Institute for Mathematics, Novi Sad 1995, pp 183 – 188

[4] Ė.Goursat : Cours d' Analyse mathématique , t.2 , cinquième édition , Paris 1929, 682 pp

[5] D.S.Mitrinović : Kompleksna analiza (drugo dopunjeno izdanje) , Beograd 1971 , str. 256

[6] Fempl S. On nonanalitic functions whose deviation from analyticity is ananalitical function . GLAS CCLIV , Section of Natural Sciences and Mathematics . Vol.24, Beograd , 1963 (in Serbian)

[7] Bilimovitch A.Sur la mesure de deflexion d'une fonction non analitique par raport a une fonction non analitique .C . R . Acad . Sci . Paris , 237 (1953) , 694

ILIEVSKI Borko
St. Cyril and Methodius University
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Institute of Mathematics
P.O. Box 162, 1000 Skopje, Republic of Macedonia
e-mail: borkoi@iunona.pmf.ukim.edu.mk

BRSAKOSKA Slagjana
St. Cyril and Methodius University
Faculty of Natural Sciences and Mathematics, Institute of Mathematics
P.O. Box 162, 1000 Skopje, Republic of Macedonia
e-mail: slaganak@iunona.pmf.ukim.edu.mk