8 МСДР 2004, (141 - 148)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

КОНЕЧНИ МАТЕМАТИЧКИ ИЗБОРНИ НИЗИ

Драган Димитровски, Јорданка Митевска
Природно–математички факултет–Скопје

ВОВЕД

Областа на правните науки е една од областите во кои математиката се применува многу малку. Но, практиката покажува дека без примена на математиката дури и во оваа област може да се направат грешки. Тоа е случај со изборните методи, особено при Донтовиот, Сен-Лаговиот и модифицираниот метод, каде се користат конечните математички низи.

Во овој труд, без да навлегуваме во прашањата на демократичноста или правната легитимност на изборните резултати, ќе дадеме математички доказ на формулата за пресметување на изборните резултати по Донтовиот метод, што скоро автоматски подразбира и анологни формули и за Сен-Лаговиот и модифицираниот метод, за која формула сметаме дека не е позната и со која се објаснуваат многу недостатоци и нелогичности на Донтовиот метод кои се јавуваат во изборната пракса. Прашањето е особено важно бидејќи Донтовиот изборен метод се користи во голем број држави.

ФОРМУЛА ЗА МНОЗИНСКИ ИЗБОРЕН СИСТЕМ

Ги воведуваме следните означувања за основните изборни големини:

M - вкупна маса на важечки изборни ливчиња;

m_i - број на гласови добиени за i-тата партија или поединец;

p_i - број на пратеници кои ги добива секоја партија врз основа на m_i;

p - броен состав на Парламентот (константа);

n - број на релевантни партии учеснички во изборите.

Основен изборен проблем (во математичка смисла) е да се определи изборната функција

$$p_i = p_i(m_i) \tag{1}$$

која го дава бројот на пратеници избрани според соодветен изборен метод врз основа на гласовите. Таа е различна според различни изборни методи и постапки.

Основните изборни релации се исти во секој метод:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = M \tag{2}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p \tag{3}$$

Ако е $m_1 > m_2 > \ldots > m_n \geq 0$, тогаш е природно да важи $p_1 > p_2 > \ldots > p_n \geq 1$.

Појдовна изборна хипотеза за мнозинскиот систем е бројот на избраните пратеници да е право пропорционален на добиените избирачки маси. Имено, потребно е да важи релацијата

$$\frac{m_1}{p_1} = \frac{m_2}{p_2} = \frac{m_3}{p_3} = \ldots = \frac{m_n}{p_n} = \frac{M}{p} \tag{4}$$

или

$$\frac{p_i}{m_i} = \frac{p}{M} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

од каде ја добиваме **основната формула за бројот на пратениците по мнозинскиот изборен систем:**

$$p_i = \frac{p}{M} m_i, \; i = 1,2,\ldots,n \tag{5}$$

во која бројот

$$k = \frac{M}{p} = \frac{\text{вкупна важечка избирачка маса}}{\text{вкупен број пратеници во изборното тело}} =$$

$$= \text{број на избирачи потребни за еден пратеник}$$

Бројот κ е **изборен коефициент.**

Добри страни на мнозинскиот изборен метод се:

- потполно еднаков број гласови за едно пратеничко место (демократичност)
- еднаква примена и изборни предвидувања (транспарентност)
- уважување и на малите партии (рамноправност)

Слабости на мнозинскиот изборен метод се:

- голем број уситнети партии во парламентот, што отежнува стекнување на мнозинство и изгласување на законите;
- тешкотии при формирање на коалиции потребни за брза и ефикасна работа на парламентот, а особено при донесување на уставни закони за кои е потребно двотретинско мнозинство;
- поради намалена ефикасност, зголемен број на парламентарни кризи, што значи општествена нестабилност.

ДОНТОВ ИЗБОРЕН МЕТОД

Мнозинскиот изборен систем е без сомнение математички и демократски најкоректен. Може да се докаже дека при него отстапувањата од средината се минимални и тоа е единствен систем со оваа особина. Меѓутоа, потребата за компромиси, неопходни во животот, често пати бара напуштање на овој систем. Затоа се предложени други изборни системи од кои најмногу се применува ДОНТОВИОТ МЕТОД.

Суштината на овој метод се состои во следното:

- Изборните маси $m_1, m_2, \ldots, m_n$, подредени по големина, ги делиме со природни броеви и така ги добиваме конечните низи

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{m_1}{1}, \frac{m_1}{2}, \frac{m_1}{3}, \frac{m_1}{4}, \quad \ldots \quad, \frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{p_1}}, \quad \ldots \quad, \frac{m_1}{N} \\
\frac{m_2}{1}, \frac{m_2}{2}, \frac{m_2}{3}, \ldots \quad, \frac{\boldsymbol{m_2}}{\boldsymbol{p_2}}, \quad \ldots \quad, \frac{m_2}{N} \\
\frac{m_3}{1}, \frac{m_3}{2}, \quad \ldots \quad, \frac{\boldsymbol{m_3}}{\boldsymbol{p_3}}, \quad \ldots \quad, \frac{m_3}{N} \\
\ldots \\
\frac{m_n}{1}, \ldots, \frac{\boldsymbol{m_n}}{\boldsymbol{p_n}}, \quad \ldots \quad, \frac{m_n}{N}
\end{array}\right\} \qquad (6)$$

Од овие низи ги избираме првите p_i најголеми количници, p_1 за m_1, p_2 за m_2, итн. p_n за m_n, така што да важи (3). Секој од овие количници тогаш определува по едно пратеничко место.

Овој метод е очигледно конструиран интуитивно. Не сме сретнале математички доказ и формула, кои би ја потврдиле неговата коректност и демократичност.

ХАРМОНИСКИ СУМИ

Математизацијата на изборниот проблем може да се изведе ако Донтовиот триаголник од шемата (6) се претвори во формула.

Тоа може да се направи само ако елементите - количници ги собереме, за статистика или аналитичка обработка. Така добиваме n конечни суми

$$\begin{aligned}&\frac{m_i}{1}+\frac{m_i}{2}+\frac{m_i}{3}+\ldots+\frac{m_i}{p_i}+\ldots+\frac{m_i}{n}=\\&=m_i\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p_i}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=m_i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\ (i=1,2,\ldots,n)\end{aligned} \tag{7}$$

кои ги викаме **конечни хармониски суми**. Тоа се суми кои растат многу полека, при растење на бројот на членовите, што во математиката претставува **спора дивергенција**. За овие низи како единствено средство за сумирање служи теоремата на Ојлер:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C=\text{Euler}-\text{ова константа}\approx 0{,}56\,. \tag{8}$$

Ако ја примениме оваа формула врз конечните низи тогаш важи

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n\,.$$

Бидејќи ε_n зависи од n и не може да се оцени однапред, следува дека не може да се оцени ниту горната сума. Спората дивергенција на горната сума може да се согледа низ следниот пример.

Да најдеме колку членови n треба да собереме за да имаме сума еднаква на 20, што определува 20 пратеници:

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}_{=20,\ n=?}\approx \ln n+C$$

Ако земеме $n=1\ 000\ 000\ 000=10^9$ и логаритмираме имаме

$$\ln n=\ln 10^9=9\cdot\ln 10=9\cdot 2{,}30+0{,}56\approx 21{,}2\,.$$

Значи за да добиеме сума 20 (т.е.20 пратеници) треба да собереме една милијарда членови во горната низа. Бидејќи во Македонија мнозинство се определува со над 60 пратеници, тоа значи дека треба да собереме над 3 милијарди дропки, што е многу и за компјутер, а не за рачно собирање при изборните комисии.

Затоа Донтовиот метод даден со дефиницијата (6) е особено тежок за прогнозирање и е нетранспарентен за примена.

МАТЕМАТИЧКИ ДОКАЗ НА ДОНТОВИОТ СИСТЕМ. МЕТОД НА РЕЦИПРОЧНИ МОМЕНТИ

Бидејќи собирањето во шемата е тешко изводливо, ќе го примениме методот на моменти, што особено се користи во физиката, и статистиката. Има многу моменти: на сила, на инерција, на работа, на количество движење, импулс на сила, кинетичка енергија. Ние ќе примениме момент во вид на јачина на полето, $E=\frac{f_i}{r_i}$, т.е. во вид на реципрочни вредности на Донтовите количници $\frac{n}{m_i}$ во (6). Имено ќе ги разгледуваме реципрочните низи

$$\frac{1}{m_i},\frac{2}{m_i},\frac{3}{m_i},\ldots,\frac{p_i}{m_i},\ldots,\frac{N}{m_i}$$

кои се сумираат лесно, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{m_i}=\frac{1}{m_i}\sum_{k=1}^{n}(1+2+3+\ldots+k)=\frac{1}{m_i}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\,. \tag{9}$$

Причината за ваква трансформација на Донтовите количници е едноставна и се состои во следното:

На максимумот на Донтовите количници соответствува и максимална сума

$$\max\frac{m_i}{p_j}\leftrightarrow\max\sum_{i,j}\frac{m_i}{p_j}$$

и реципрочно, на минималните Донтови количници соответствува минимална сума

$$\min\frac{p_i}{m_j}\leftrightarrow\min\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{j}p_i \tag{10}$$

ИЗБОРНА ФУНКЦИЈА

Формираме збир од реципрочните вредности на членовите од Донтовата шема

$$F(m_j,p_i)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{m_j}\sum_{i=1}^{j}p_i \tag{11}$$

кој ќе го наречеме **изборна функција**. Таа зависи од избирачките маси m_j, од пратениците p_i и бројот на партиите што учествуваат во изборите.

Ако m_j и p_i се непрекинати променливи, тогаш проблемот на наоѓање на $\min F(m_j, p_i)$ се сведува на примена на апаратот на математичката анализа: *определување условни екстреми на* $F(m_j, p_i)$ *при условите* (2) и (3).

ЛАГРАНЖОВА ФУНКЦИЈА НА УСЛОВНИ ЕКСТРЕМИ

Со (10), (2) и (3) формираме Лагранжова функција со параметри λ и μ:

$$\Phi(m_i, p_i, \lambda, \mu) = F(m_i, p_i) + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - p\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} m_i - M\right)$$

ЛАГРАНЖОВИ ФОРМУЛИ ЗА УСЛОВЕН ЕКСТРЕМ

Од анализата е познато дека во случај на екстрем ($\max$ или $\min$) за (11) ќе важи:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial m_i} = 0 \qquad (2n \text{ равенки})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0 \tag{13}$$

ДОНТОВИ РАВЕНКИ И НИВНО РЕШЕНИЕ

Од (9), (11), (12) и (13) добиваме:

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\,2} + p_i}{2m_i} + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - p\right) + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} m_i - M\right) \\
&\frac{\partial \Phi}{\partial p_i} = \frac{2p_i + 1}{2m_i} + \lambda \cdot 1 = 0 \\
&\frac{\partial \Phi}{\partial m_i} = -\frac{p_i^{\,2} + p_i}{2m_i^{\,2}} + \mu \cdot 1 = 0 \\
&\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = p_1 + p_2 + \ldots + p_n - p = 0 \\
&\frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = m_1 + m_2 + \ldots + m_n - M = 0
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Од овие равенки наоѓаме:

$$p_i = -\lambda m_i - \frac{1}{2}, \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{15}$$

$$\lambda = -\frac{p + \frac{n}{2}}{M} \tag{16}$$

од кои ја добиваме Донтовата формула за основниот изборен проблем (1):

$$\boxed{p_i = m_i \cdot \frac{p}{M} + \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{m_i}{M} - 1\right), \ i = 1,2,\ldots,n\,.} \tag{17}$$

Од формулата (17) можни се следните заклучоци:

1. Донтовиот број на пратеници е еднаков на збирот од множинскиот број пратеници $\frac{m_i p}{M}$ и собирокот

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{m_i}{M} - 1\right) \tag{18}$$

т.е.

$$p_{i(\text{по Донт})} = p_{i(\text{по множ.})} + \Delta$$

2. Разликата $\Delta = p_{i(\text{по Донт})} - p_{i(\text{по множ.})}$ е толку поголема колку е поголем бројот m_i и бројот на партиите n.

3. Партиите со голем број пратеници по Донт добиваат уште поголем број пратеници.

4. ИЗБОРЕН ПРЕЛОМ. Не постои разлика помеѓу Донтовиот и множинскиот метод ако

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{m_i}{M} - 1\right) = 0$$

од каде добиваме

$$m_i = \frac{M}{n}\,.$$

(Овој број во Р.Македонија на изборите во 2002 година изнесуваше 40 000 гласачи).

5. Ако партијата има избирачи над бројот $\frac{M}{n}$, таа автоматски добива Δ пратеници повеќе. Партиите што имаат избирачи околу бројот $\frac{M}{n}$, со Донтовиот систем не добиваат повеќе пратеници, т.е.

тие добиваат еднаков број пратеници и по Донтовиот и по мнозинскиот систем. Партиите за кои бројот на избирачи е под прагот $\frac{M}{n}$ имаат негативна разлика Δ и тие партии губат Δ пратеници по Донтовиот во однос на мнозинскиот систем.

6. Големите партии добиваат уште повеќе пратеници, а малите ги губат и онака малиот број места. Според тоа најмалите партии се потполно уништени.

7. Бидејќи масата на важечки гласови е M и таа е фиксна, следува дека големите партии добиваат извесен број пратеници на сметка на малите партии и тоа точно од нивните гласови (така во Македонија, 4 победнички партии ги имаат превземено гласовите од 12 мали партии и така некои партии добиваат и по 20% повеќе пратенички места).

8. Донтовиот метод врши еден вид аритметичко присвојување на гласовите.

9. Донтовиот метод го намалува бројот на парламентарните партии.

Останува на правниците да ја оценат демократичноста на овој изборен метод.

Се остава широко поле за дискусија за успешноста на Донтовата формула во старите и големи европски демократии и во малите и зависни држави.

Исто така, потребна е посебна анализа и за зголемувањето (мултиплицирањето) на грешката Δ при поделба на државата на изборни единици (6 во Р. Македонија) или по временски зони (8 во Русија).

Овде уште еднаш ја препознаваме инаку познатата релативност на демократијата - нема идеално праведен изборен метод и истовремено ефикасна државна власт.