8 МСДР 2004, (91 - 98)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА НЕКОИ ПОСЛАБИ УСЛОВИ ЗА РЕДУКТИБИЛНОСТ НА ЕДНА ЛИНЕАРНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ЧЕТВРТ РЕД ЧИЈ ОПШТ ИНТЕГРАЛ Е ПОЛИНОМ

Елена Хаџиева
Електротехнички факултет - Скопје
hadzieva@etf.ukim.edu.mk

Апстракт: Во трудов се разгледува линеарна диференцијална равенка од четврти ред која има полиномни коефициенти, чиј степен е ист со редот на изводот пред кој се наоѓаат. Добиени се доволни услови за сведување на равенката на решлив систем од две линеарни равенки од прв ред и една линеарна равенка од втор ред.

Во трудов се разгледува диференцијалната равенка

$$a(x)y^{IV}+b(x)y'''+c(x)y''+d(x)y'+e(x)y=0, \tag{1}$$

каде $a(x) = A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0$, $b(x)= B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0$, $c(x)= C_2x^2+C_1x+C_0$, $d(x)= D_1x+D_0$, $e(x)= E_0$, A_i, B_i, C_i, D_i и E_i (i прима соодветни вредности) се константи, A_4 е ненулта константа.

Истава равенка е разгледувана во [1], но овде се добиени послаби услови за нејзино решавање. Идејата е инспирирана од трудот [2].

Ако равенката (1) се диференцира n пати, се добива

$$\begin{aligned}
&a(x)y^{(n+4)}+\left[\binom{n}{1}a'(x)+\binom{n}{0}b(x)\right]y^{(n+3)}+\\
&\left[\binom{n}{2}a''(x)+\binom{n}{1}b'(x)+\binom{n}{0}c(x)\right]y^{(n+2)}+\\
&\left[\binom{n}{3}a'''(x)+\binom{n}{2}b''(x)+\binom{n}{1}c'(x)+\binom{n}{0}d(x)\right]y^{(n+1)}+\\
&\left[\binom{n}{4}a^{IV}(x)+\binom{n}{3}b'''(x)+\binom{n}{2}c''(x)+\binom{n}{1}d'(x)+\binom{n}{0}e(x)\right]y^{(n)}=0
\end{aligned} \tag{2}$$

Потребен и доволен услов за да диференцијалната равенка (1) има полиномно решение од степен *n,* е да биде задоволена релацијата ([3,4]):

$$\binom{n}{4}a^{IV}(x)+\binom{n}{3}b'''(x)+\binom{n}{2}c''(x)+\binom{n}{1}d'(x)+\binom{n}{0}e(x)=0 \qquad (3)$$

$$\binom{n}{3}a'''(x)+\binom{n}{2}b''(x)+\binom{n}{1}c'(x)+\binom{n}{0}d(x)\neq 0 \qquad (4)$$

(Во случај кога равенката (3) има повеќе корени природни броеви, се зема најмалиот од нив.) Ќе претпоставиме дека сега диференцијалната равенка (2) го има обликот:

$$\begin{aligned}&a(x)y^{(n+4)}+\left[\binom{n}{1}a'(x)+\binom{n}{0}b(x)\right]y^{(n+3)}+\\&+\left[\binom{n}{2}a''(x)+\binom{n}{1}b'(x)+\binom{n}{0}c(x)\right]y^{(n+2)}+\\&+\left[\binom{n}{3}a'''(x)+\binom{n}{2}b''(x)+\binom{n}{1}c'(x)+\binom{n}{0}d(x)\right]y^{(n+1)}=0\end{aligned} \qquad (5)$$

За коефициентот пред $y^{(n+1)}$ се добива:

$$\begin{aligned}&\binom{n}{3}a'''(x)+\binom{n}{2}b''(x)+\binom{n}{1}c'(x)+\binom{n}{0}d(x)=\\&=(4n(n-1)(n-2)A_4+3n(n-1)B_3+2nC_2+D_1)x+\\&+n(n-1)(n-2)A_3+n(n-1)B_2+nC_1+D_0\end{aligned}$$

Ќе означиме $\alpha = 4n(n-1)(n-2)A_4+3n(n-1)B_3+2nC_2+D_1$,
$\beta = n(n-1)(n-2)A_3+n(n-1)B_2+nC_1+D_0$.

Ставаме:

$$a(x)=\frac{1}{p}(Ax^3+Bx^2+Cx+D)(\alpha x+\beta), \qquad (6)$$

$$\binom{n}{1}a'(x)+\binom{n}{0}b(x)=\frac{1}{p}(Ex^2+Fx+G)(\alpha x+\beta), \qquad (7)$$

$$\binom{n}{2}a''(x)+\binom{n}{1}b'(x)+\binom{n}{0}c(x)=\frac{1}{p}(Hx+I)(\alpha x+\beta), \qquad (8)$$

па равенката (1) станува

$$(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)y^{(n+4)} + (Ex^2 + Fx + D)y^{(n+3)} +$$
$$+ (Hx + I)y^{(n+2)} + py^{(n+1)} = 0 \qquad (9)$$

Ако последнава равенка,. (9), ја диференцираме m-1 пати, (m е природен број), се добива:

$$\begin{aligned}&(Ax^3+Bx^2+Cx+D)y^{(n+m+3)}+\\&+[(3(m-1)A+E)x^2+(2(m-1)B+F)x+(m-1)C+G]y^{(n+m+2)}+\\&+[(3(m-1)(m-2)A+2(m-1)E+H)x+\\&+(m-1)(m-2)B+(m-1)F+I]y^{(n+m+1)}+\\&+[(m-1)(m-2)(m-3)A+(m-1)(m-2)E+(m-1)H+p]y^{(n+m)}=0\end{aligned} \qquad (10)$$

Доволен услов за да (1) има полиномно решение од степен $n+m$ е ([5]):

$$(m-1)(m-2)(m-3)A+(m-1)(m-2)E+(m-1)H+p=0, \qquad (11)$$

со што (10) го добива обликот:

$$\begin{aligned}&(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)y^{(n+m+3)} +\\&+[(3(m-1)A + E)x^2 + (2(m-1)B + F)x + (m-1)C + G]y^{(n+m+2)} +\\&+[(3(m-1)(m-2)A + 2(m-1)E + H)x +\\&+ (m-1)(m-2)B + (m-1)F + I]y^{(n+m+1)} = 0\end{aligned} \qquad (12)$$

Ако коефициентот пред $y^{(n+m+1)}$ во равенката (12) е различен од 0,

$$\begin{aligned}&(3(m-1)(m-2)A + 2(m-1)E + H)x +\\&+ (m-1)(m-2)B + (m-1)F + I \neq 0\end{aligned} \qquad (13)$$

и ако означиме $\gamma = 3(m-1)(m-2)A+2(m-1)E+H$, $\delta = (m-1)(m-2)B+(m-1)F+I$, ставајќи

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = \frac{1}{q}(Lx^2 + Mx + N)(\gamma x + \delta) \qquad (14)$$

$$(3(m-1)A + E)x^2 + (2(m-1)B + F)x + (m-1)C + G) =$$
$$= \frac{1}{q}(Jx + K)(\gamma x + \delta) \qquad (15)$$

за равенката (12) се добива:

$$(Lx^2+Mx+N)y^{(n+m+3)}+(Jx+K)y^{(n+m+2)}+qy^{(n+m+1)} = 0. \qquad (16)$$

Ако ставиме $y^{(n+m+1)}=z$, тогаш последнава равенка добива вид:

$$(Lx^2+Mx+N)z''+(Jx+K)z'+qz=0 \qquad (17)$$

Коефициентите *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N* треба да се определат, додека воведените константи *p* и *q* во понатамошните истражувања нема да влијаат.

Од равенството (6) се добива:

$$A=\frac{p}{\alpha}A_4; \qquad B=\frac{p}{\alpha}(A_3-\frac{\beta}{\alpha}A_4);$$
$$C=\frac{p}{\alpha}(A_2-\frac{\beta}{\alpha}A_3+\frac{\beta^2}{\alpha^2}A_4);$$
$$D=\frac{p}{\alpha}(A_1-\frac{\beta}{\alpha}A_2+\frac{\beta^2}{\alpha^2}A_3-\frac{\beta^3}{\alpha^3}A_4);$$
$$A_0-\frac{\beta}{\alpha}A_1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}A_2-\frac{\beta^3}{\alpha^3}A_3+\frac{\beta^4}{\alpha^4}A_4=0 \qquad (18)$$

Од равенството (7) се добива:

$$E=\frac{p}{\alpha}(4nA_4+B_3); \qquad F=\frac{p}{\alpha}(3nA_3+B_2-\frac{\beta}{\alpha}(4nA_4+B_3));$$
$$G=\frac{p}{\alpha}(2nA_2+B_1-\frac{\beta}{\alpha}(3nA_3+B_2)+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(4nA_4+B_3));$$
$$nA_1+B_0-\frac{\beta}{\alpha}(2nA_2+B_1)+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(3nA_3+B_2)-\frac{\beta^3}{\alpha^3}(4nA_4+B_3)=0 \qquad (19)$$

Од (8) пак, се добива:

$$H=\frac{p}{\alpha}(6n(n-1)A_4+3nB_3+C_2);$$

$$I=\frac{p}{\alpha}(3n(n-1)A_3+2nB_2+C_1-\frac{\beta}{\alpha}(6n(n-1)A_4+3nB_3+C_2));$$

$$n(n\text{-}1)A_2+nB_1+C_0-\frac{\beta}{\alpha}(3n(n-1)A_3+2nB_2+C_1)+$$

$$+\frac{\beta^2}{\alpha^2}(6n(n-1)A_4+3nB_3+C_2)=0 \tag{20}$$

Од (14) се добива:

$$L=\frac{qp}{\gamma\alpha}A_4; \qquad M=\frac{qp}{\gamma\alpha}(A_3-(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\gamma})A_4)$$

$$N=\frac{qp}{\gamma\alpha}(A_2-(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\gamma})A_3+(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\delta^2}{\gamma^2})A_4);$$

$$A_1-(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\delta}{\gamma})A_2+(\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\delta^2}{\gamma^2})A_3-$$

$$(\frac{\beta^3}{\alpha^3}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\delta}{\gamma}+\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta^2}{\gamma^2}+\frac{\delta^3}{\gamma^3})=0 \tag{21}$$

Од (15) се добива:

$$J=\frac{qp}{\gamma\alpha}((4n+3m-3)A_4+B_3);$$

$$K=\frac{qp}{\gamma\alpha}((3n+2m-2)A_3+B_2-\frac{\beta}{\alpha}((4n+2m-2)A_4+B_3)-$$

$$-\frac{\delta}{\gamma}((4n+3m-3)A_4+B_3)));$$

$$(2n+m-1)A_2+B_1-\frac{\beta}{\alpha}((3n+m-1)A_3+B_2)-$$

$$\frac{\delta}{\gamma}((3n+2m-2)A_3+B_2)+\frac{\beta^2}{\alpha^2}((4n+m-1)A_4+B_3)+ \tag{22}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\frac{\delta}{\gamma}((4n+3m-2)A_4+B_3)+\frac{\delta^2}{\gamma^2}((4n+3m-3)A_4+B_3)=0$$

Од (14) и (6) се гледа дека корените на равенката $Lx^2+Mx+N=0$, x_3 и x_4, се и корени на равенката $a(x) = 0$, а останатите два корени на равенката $a(x)=0$ се: $x_1=-\beta/\alpha$ (заради (6)) и $x_2=-\delta/\gamma$ (заради (6) и (14)). Како што е познато ([4,6]), потребен и доволен услов за да диференцијалната равенка (17) има две полиномни решенија од степени j-1 и $j+k+1$ (j, k се природни броеви), е да бидат задоволени релациите:

$$\begin{aligned}&L(j-1)^2+(J-L)(j-1)+q=0\\&(2j+k-3)L+J=0\\&[(j+k-r-2)x_3+(j+r-1)x_4]L-K=0, \quad r=0,1,2,\ldots,j-1\end{aligned} \qquad (23)$$

Од втората равенка од (23) имаме: $B_3 = -(4n+3m+2j+k-6)A_4$.

Од првата равенка од (23) се добива:

$$\begin{aligned}C_2=[&(n+m+j+k-2)(n+m+j-2)+(n+m+j+k-r-2)(n+m-1)+\\&+(n+m+j+r-1)(n+m-1)+(n+m+j+k-r-2)n\\&+(n+m+j+r-1)n+(n+m)n]A_4.\end{aligned}$$

Од (11) добиваме:

$$\begin{aligned}D_1=-[&(n+m+j+k-1)(n+m+j-1)(n+m-1)+(n+m+j+k-1)(n+m+j-1)n+\\&+(n+m+j+k-r-1)(n+m)n+(n+m+j+r)(n+m)n]A_4,\end{aligned}$$

а од (3) се добива

$$E_0=(n+m+j+k)(n+m+j)(n+m)n\,A_4.$$

Од третата равенка од условите (23) ќе најдеме дека:

$$\begin{aligned}B_2= [&(3n+3m+2j+k-6)x_1+(3n+2m+2j+k-5)x_2+\\&+(3n+2m+j+k-r-4)x_3+(3n+2m+j+r-3)x_4]\,A_4.\end{aligned}$$

Од (22) пак, имаме:

$$\begin{aligned}B_1=-[&(2n+2m+2j+k-5)x_1x_2+(2n+2m+j+k-r-4)x_1x_3+(2n+2m+j+\\&r-3)x_1x_4+(2n+m+j+k-r-3)x_2x_3+(2n+m+j+r-2)x_2x_4+(2n+m-1)x_3x_4]A_4.\end{aligned}$$

Од (19) се добива

$$\begin{aligned}B_0=[&(n+m+k+j-r-3)x_1x_2x_3+(n+m+j+r-2)x_1x_2x_4+\\&+(n+m-1)x_1x_3x_4+nx_2x_3x_4]A_4,\end{aligned}$$

А тргнувајќи од тоа што $x_2=-\delta/\gamma$, се добива:

$$C_1=-\{x_1[(n+m+j+k\text{-}2)(n+m+j\text{-}2)+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)(n+m+1)+ +(n+m+j+r\text{-}1)(n+m\text{-}1)]+x_2[(n+m+j+k\text{-}2)(n+m+j\text{-}2)+ +(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)n+(n+m+j+r\text{-}1)n]+ +x_3[(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)(n+m\text{-}1)+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)n+(n+m)n]+ +x_4[(n+m+j+r\text{-}1)(n+m\text{-}1)+(n+m+j+r\text{-}1)n+(n+m)n]\}A_4.$$

И на крај, од тоа што $x_1=-\beta/\alpha$ се добива изразот за D_0:

$$D_0=[(n+m+j+k\text{-}1)(n+m+j\text{-}1)(n+m\text{-}1)x_1+(n+m+j+k\text{-}1)(n+m+j\text{-}1)nx_2+ +(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(n+m)nx_3+(n+m+j+r)(n+m)nx_4]A_4.$$

Равенката (1) сега се трансформира во следниов облик:

$$(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y^{IV} - [(n+m+j+k\text{-}r\text{-}3)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_3)+ +(n+m+j+r\text{-}2)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_4)+(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)+ +n(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)]y''' + [(n+m+j+k\text{-}2)(n+m+j\text{-}2)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)+ +(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r\text{-}1)(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_4)+ +(n+m+j+k\text{-}r\text{-}2)n(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r\text{-}1)n(x\text{-}x_2)(x\text{-}x_4)+ +(n+m)n(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)]y''-[(n+m+j+k\text{-}1)(n+m+j\text{-}1)(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)+ +(n+m+j+k\text{-}1)(n+m+j\text{-}1)n(x\text{-}x_2)+(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(n+m)n(x\text{-}x_3)+ +(n+m+j+r)(n+m)n(x\text{-}x_4)]y' + (n+m+j+k)(n+m+j)(n+m)ny=0, \tag{*}$$

односно

$$(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)\{(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y''-[(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r)(x\text{-}x_4)]y'+ (n+m+j+k)(n+m+j)y\}'' - [(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)+ n(x\text{-}x_2)]\{(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y''- -[(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r)(x\text{-}x_4)]y'+ (n+m+j+k)(n+m+j)y\}'- +n(n+m)\{(x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y''-[(n+m+j+k\text{-}r13)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r)(x\text{-}x_4)]y'+ + (n+m+j+k)(n+m+j)y\}=0.$$

Ако означиме:

$$z = (x\text{-}x_3)(x\text{-}x_4)y'' - [(n+m+j+k\text{-}r\text{-}1)(x\text{-}x_3)+(n+m+j+r)(x\text{-}x_4)]y' + +(n+m+j+k)(n+m+j)y,$$

тогаш последнава равенка добива облик:

$$(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)z'' - [(n+m\text{-}1)(x\text{-}x_1)+ n(x\text{-}x_2)]z'+n(n+m)z=0.$$

Ако направиме уште една трансформација, имаме

$$(x\text{-}x_1)[(x\text{-}x_2)z'\text{-}(n+m)z]'\text{-}n[(x\text{-}x_2)z'\text{-}(n+m)z]=0,$$

и ставајќи $(x\text{-}x_2)z'\text{-}(n+m)z=v$, се добива:

$$(x\text{-}x_1)v'\text{-}nv=0.$$

Значи равенката (1) се сведува на системот:

$$\{(x-x_3)(x-x_4)y''-[(n+m+j+k-r-1)(x-x_3)+(n+m+j+r)(x-x_4)]y'+ \\ +(n+m+j+k)(n+m+j)y\}=z$$

$$(x-x_2)z'-(n+m)z=v$$

$$(x-x_1)v'-nv=0.$$

Се доби решлив систем од две линеарни диференцијални равенки од прв ред и една линеарна диференцијална равенка од втор ред.

On Some Weaker Condition for reducibility of a homogeneous linear differential equation of forth order with a polynomial general solution

Elena Hadzieva
Department of Electrical Engineering
hadzieva@etf.ukim.edu.mk

Abstract:
A linear differential equation of forth order with polynomial coefficients is observed in this article. The degree of each coefficient is the same as the order of the derivative which is multiplied by. Sufficient conditions for reducing the equation to a solvable system of three differential equation (two of them are of the first order, and the third one of the second order) are obtained.

Литература:

[1] Hadzieva E. J., Shapkarev I. A., Polynomial as a General Solution of a Linear Differential Equation of Fourth Order, Mathematica Balkanica, Vol. 18, 2004, Fasc. 3-4., Sofia, p.295 – 303

[2] Шапкарев И. А., За некои послаби услови за редуктибилност на една линеарна хомогена диференцијална равенка од трет ред чиј општ интеграл е полином, ракопис

[3] Пиперевски Б. М., Егзистенција и конструкција на полиномно решение на една класа линеарни диференцијални равенки од трет ред, Зборник на трудови на ЕТФ, 1996, Скопје

[4] Пиперевски Б. М., Полиномни решенија на една класа линеарни диференцијални равенки, Докторска дисертација, 1982, Скопје

[5] Шапкарев И. А., Полином како општо решение на една хомогена диференцијална равенка од трет ред, Зборник на трудови, Втор конгрес на математичарите и информатичарите на Македонија, 2000, Скопје

[6] Shapkarev I. A., Piperevski B. M., Hadzieva E. J., On Some Special General Integrals of a Linear Differential Equations of Second Order, Mathematica Balkanica, Vol. 18, 2004, Fasc. 3-4., Sofia, p. 453-459