8 МСДР 2004, (73 - 84)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

УСЛОВИ ЗА ПОСТОЕЊЕ НА КВАЗИПЕРИОДИЧНИ РЕШЕНИЈА ЗА НЕКОИ НЕХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД I И II РЕД

[1]Јорданка Митевска, [2]Марија Кујумџиева Николоска, [3]Драган Димитровски
Природно–математички факултет [1,3],
Електротехнички факултет [2]–Скопје
e–mail: marekn@etf.ukim.edu.mk

Апстракт. Во овој труд наоѓаме услови при кои нехомогената линеарна диференцијална равенка од I ред (5) и нехомогената линеарна диференцијална равенка од II ред (24) имаат квазипериодични решенија. Добиените услови се искажани преку седум теореми.

ВОВЕД

Дефиниција. Функцијата $y=\varphi(x)$, $x\in I\subseteq R$ ја нарекуваме **квазипериодична** (КПФ) ако постои функција $\omega(x)$ и број $\lambda\in R$ такви што да е задоволена релацијата

$$\varphi(x+\omega(x))=\lambda\varphi(x),\ \forall x,\ x+\omega(x)\in I \tag{1}$$

Функцијата $\omega(x)$ ја викаме **квазипериод** (КП) за функцијата $y=\varphi(x)$, а λ **- квазипериодичен коефициент** (КПК) или **коефициент на деформација.**

Ако $\lambda=1$ и $\omega(x)=konst.$ тогаш функцијата $\varphi(x)$ е периодична во класична смисла.

Во врска со воведениот поим за квазипериодичност на функција го поставуваме следниов проблем:

Ако функцијата $y(x)$ е зададена имплицитно со диференцијалната равенка

$$F\left(x,y,y',\dots,y^{(n)}\right)=0, \tag{2}$$

да најдеме услови при кои равенката (2) има квазипериодични решенија (КПР), т.е. услови за постоење на функција (закон) $\omega(x)$ и број λ, за кои важи

$$y(x+\omega(x)) = \lambda y(x), \quad x, x+\omega(x) \in D_y \tag{3}$$

Равенките (2)+(3) образуваат систем што ги дефинира функциите $y(x)$ и $\omega(x)$, па поставениот проблем го сведуваме на решавање на системот

$$\begin{cases} F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0 \\ y(x+\omega(x)) = \lambda y(x) \\ (y(x+\omega(x)))^{(k)} = \lambda y^{(k)}(x), \quad k = 1,2,\dots,n \end{cases} \tag{4}$$

што во општ случај се сведува на нелинеарна диференцијална равенка по y и функционално-диференцијална равенка по $\omega(x)$. Генерално, не е лесно да се реши ваков систем, особено ако (2) е диференцијална равенка од повисок ред.

Ако (2) е линеарна равенка, системот (4) е поедноставен и тој е линеарен по $y(x)$ и нејзините изводи, но е нелинеарен по $\omega(x)$.

Во трудот презентиран на меѓународната конференција МАТЕМАТИКА 2004, во КРАГУЕВАЦ, се изложени добиените резултати за хомогена линеарна диференцијална равенка од I ред

$$y' + f(x)y = 0$$

и за хомогена линеарна диференцијална равенка од II ред

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 .$$

Овде, во врска со поставениот проблем за квазипериодичност, ги изложуваме добиените резултати за нехомогени линеарни диференцијални равенки од I и II ред.

I. Нека (2) е нехомогена линеарна диференцијална равенка од I ред

$$y' + f(x)y + g(x) = 0 . \tag{5}$$

Бараме услови при кои (5) има квазипериодични решенија, т.е. решенија што ја задоволуваат релацијата (3).

Во овој случај системот (4) има вид

$$\begin{cases} y' + f(x)y + g(x) = 0 \\ y(x+\omega(x)) = \lambda y(x) \\ y'(x+\omega(x))(1+\omega'(x)) = \lambda y'(x) \end{cases} \tag{6}$$

Од условот за квазипериодичност на решението на (5), следува дека (5) треба да е задоволена и во $x+\omega(x)$, т.е. важи

$$y'(x+\omega) + f(x+\omega)\cdot y(x+\omega) + g(x+\omega) = 0\,. \tag{7}$$

Од (6) и (7) може да се елиминират $y'(x)$ и $y'(x+\omega(x))$. Така, при $1+\omega'(x)\neq 0$ од третата равенка во (6) имаме

$$y'\big(x+\omega(x)\big) = \frac{\lambda y'(x)}{1+\omega'(x)},$$

а од првата

$$y'(x) = -f(x)y - g(x)$$

и по замена во (7) добиваме

$$\frac{\lambda y'(x)}{1+\omega'} + f(x+\omega)\cdot \lambda y(x) + g(x+\omega) = 0$$

од каде

$$y\big[(1+\omega')\cdot f(x+\omega) - f(x)\big] + \left[\frac{1}{\lambda}(1+\omega')\cdot g(x+\omega) - g(x)\right] = 0 \tag{8}$$

или

$$\big[-f(x)y - g(x)\big] + (1+\omega')\cdot\left[f(x+\omega)\cdot y + \frac{1}{\lambda}g(x+\omega)\right] = 0\,, \lambda \neq 0\,. \tag{9}$$

Равенката (8), односно (9), е функционално диференцијална равенка по $\omega(x)$, т.е.

$$\Phi(x, y, \omega(x), \omega'(x), f(x), g(x), f(x+\omega), g(x+\omega)) = 0$$

која во општ случај не е лесно да се реши, иако решението на (1) може да се зададе експлицитно во однос на f и g. Затоа (9) можеме да ја разгледуваме само во некои специјални случаи.

1. Нека f и g се КПФ и такви што

$$f(x+\omega) = f(x), \quad g(x+\omega) = \lambda g(x) \tag{10}$$

При услов $f(x)y + g(x) \neq 0$, од (9) добиваме $\omega'(x) = 0$, т.е. $\omega(x) = konst.$

Следува

Теорема 1. Ако (5) има КПР со КПК λ и f и g се КПФ, такви што важи (10), тогаш $\omega(x) = \text{конст.}$.

2. Нека f и g се КПФ и такви што

$$f(x+\omega) = \mu f(x), \quad g(x+\omega) = \nu g(x), \ \mu \neq 1, \ \nu \neq \lambda$$

тогаш од (9):

$$\omega(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(1-\mu) f(x) y + (1-\frac{\nu}{\lambda}) g(x)}{\mu f(x) y + \frac{\nu}{\lambda} g(x)} dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{(1-\mu) f(x)[e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}(C - \int_{x_0}^{x} g(t) e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt)] + (1-\frac{\nu}{\lambda}) g(x)}{\mu f(x)[e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)dt}(C - \int_{x_0}^{x} g(t) e^{\int_{t_0}^{t} f(u)du} dt)] + \frac{\nu}{\lambda} g(x)} dx \tag{11}$$

3. Од (9), при $\omega' = 0$ т.е. $\omega(x) = \text{конст.} = \omega^*$ и $f(x+\omega^*) - f(x) \neq 0$, добиваме:

$$y = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{g(x+\omega^*) - \lambda g(x)}{f(x+\omega^*) - f(x)}. \tag{12}$$

Ако f и g се КПФ при што

$$f(x+\omega^*) = \mu f(x), \quad g(x+\omega^*) = \nu g(x), \tag{13}$$

тогаш

$$y = -\frac{(\nu-\lambda) g(x)}{\lambda(\mu-1) f(x)}, \ \mu \neq 1, \ f(x) \neq 0 \tag{14}$$

Притоа, бидејќи y е решение на (5), функциите f и g треба да го задоволуваат и условот

$$\lambda_1 \left(f \cdot g' - f' \cdot g \right) + \left(1 + \lambda_1 \right) g f^2 = 0,$$

каде $\lambda_1 = -\dfrac{\nu - \lambda}{\lambda(\mu - 1)}$

односно

$$\frac{f' g - f g'}{g f^2} = \frac{\lambda \mu - \nu}{\lambda - \nu}, \ g f^2 \neq 0, \quad \lambda \neq \nu \tag{15}$$

Следува

Теорема 2. Ако ДР (5) има КПР со константен КП, $\omega(x)=\omega^*=konst$ и f и g се КПФ за кои важат релациите (13) и (15), тогаш решението се определува со (14).

Во специјален случај, ако $\frac{\lambda\mu-\nu}{\lambda-\nu}=0$, т.е. $\lambda=\frac{\nu}{\mu}$, $\lambda\neq\nu$, тогаш $f'\cdot g-f\cdot g'=0$ од каде $f=Cg$ и тогаш од (14) добиваме

$$y=-\frac{1}{C}.$$

4. Равенката (5) е квадратурно решлива, т.е.

$$y(x)=e^{-\int\limits_{x_0}^{x}f(t)dt}\left[C-\int\limits_{x_0}^{x}g(t)\cdot e^{\int\limits_{x_0}^{x}f(u)du}dt\right]. \tag{16}$$

Од условот $y(x+\omega(x))=\lambda y(x)$ и (16) добиваме:

$$e^{-\int\limits_{x_0}^{x}f(t)dt}\cdot e^{-\int\limits_{x}^{x+\omega}f(t)dt}\left[C-\int\limits_{x_0}^{x}g(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}f(u)du}dt-\int\limits_{x}^{x+\omega}g(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}f(u)du}dt\right]=$$

$$=\lambda e^{-\int\limits_{x_0}^{x}f(t)dt}\left[C-\int\limits_{x_0}^{x}g(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}f(u)du}dt\right]$$

од каде

$$\left(e^{-\int\limits_{x}^{x+\omega}f(t)dt}-\lambda\right)\cdot C+\int\limits_{x_0}^{x}g(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}f(u)du}dt\cdot[\lambda-e^{-\int\limits_{x}^{x+\omega}f(t)dt}]-$$

$$\int\limits_{x}^{x+\omega}g(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t}f(u)du}dt=0\,. \tag{17}$$

(17) е задоволено за секое C ако важи:

$$\begin{cases} 1^0 \quad e^{-\int\limits_x^{x+\omega} f(t)dt} = \lambda \\ 2^0 \quad \int\limits_x^{x+\omega} g(t)\cdot e^{\int\limits_{t_0}^{t} f(u)du} dt = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Нека $F(x)$ е примитивна функција за $f(x)$, т.е.

$$F(x) = \int f(x)dx .$$

Тогаш

$$\int\limits_x^{x+\omega} f(t)dt = F(x+\omega) - F(x)$$

па од (18.1^0) следува

$$F(x+\omega(x)) = F(x) + \ln\frac{1}{\lambda}, \ \ \lambda > 0 . \tag{19}$$

Нека е

$$h(x) = e^{\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt} g(t)$$

Тогаш

$$h(x) = e^{F(x)-F(x_0)} \cdot g(x)$$

т.е.

$$h(x) = C_1 e^{F(x)} \cdot g(x), \quad C_1 = e^{-F(x_0)}$$

Ако $H(x)$ е примитивна за $e^{F(x)}g(x)$, т.е.

$$\int e^{F(x)} g(x)dx = H(x)$$

тогаш од (18.2^o) добиваме

$$H(x+\omega) = H(x) .$$

Следува

Теорема 3. Ако секое решение на (5) е КП, тогаш за примитивните функции $F(x)$ и $H(x)$ на функциите $f(x)$ и $e^{F(x)}g(x)$, соодветно, важат релациите

$$F(x+\omega(x)) = F(x) + \ln\frac{1}{\lambda}, \ \ \lambda > 0 ; \ \ H(x+\omega(x)) = H(x) . \tag{20}$$

Со парцијална интеграција, од условот (18.2°) добиваме

$$e^{F(x+\omega)}G(x+\omega)-e^{F(x)}G(x)+\int_x^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=0\ ,G'(x)=g(x)\ . \quad (21)$$

Поради (19) од (21) следува

$$e^{F(x)}\left[\frac{1}{\lambda}G(x+\omega)-G(x)\right]+\int_x^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=0$$

или

$$\int_x^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=-e^{F(x)}\left[\frac{1}{\lambda}G(x+\omega)-G(x)\right] \quad (22)$$

Специјално, ако примитивната функција за $g(x)$ е КПФ, т.е.

$$G(x+\omega(x))=\mu G(x)$$

тогаш

$$\int_x^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=(1-\frac{\mu}{\lambda})\cdot e^{F(x)}G(x)$$

Специјално, за $\lambda=\mu$, следува

$$\int_x^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=0\ .$$

Следува

Теорема 4. Доволен услов равенката (5) да има КПР е за примитивните функции $F(x)$ и $G(x)$ на функциите $f(x)$ и $g(x)$, соодветно, да важат релациите

$$\begin{cases} 1^\circ\ \ F(x+\omega)=F(x)+\ln\dfrac{1}{\lambda}, \quad \lambda>0 \\ 2^\circ\ \ \displaystyle\int_x^{x+\omega}e^{F(t)}G(t)f(t)dt=(1-\frac{\mu}{\lambda})\cdot e^{-F(x)}G(x) \end{cases} \quad (23)$$

III. За диференцијалната равенка од II ред

$$y''+f(x)y'+g(x)y=h(x) \quad (24)$$

проблемот за определување услови за постоење квазипериодични решенија, го сведуваме на системот:

$$\begin{cases} y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \\ y(x+\omega) = \lambda y(x) \\ y'(x+\omega)(1+\omega') = \lambda y'(x) \\ y''(x+\omega)(1+\omega')^2 + y'(x+\omega)\omega'' = \lambda y''(x) \end{cases} \tag{25}$$

На сличен начин како и во случај на диференцијална равенка од I ред (5), со помош на (25) и равенката

$$y''(x+\omega(x)) + f(x+\omega(x))y'(x+\omega(x)) + g(x+\omega(x))y(x+\omega(x)) = h(x+\omega(x))$$

може да ги елиминираме $y''(x)$ и $y''(x+\omega(x))$.

Така, при $1+\omega' \neq 0$ имаме:

$$y''(x+\omega) = \frac{\lambda y'' - y'(x+\omega)\cdot\omega''}{(1+\omega')^2}$$

и

$$\frac{\lambda(h(x) - f(x)y' - g(x)y) - \dfrac{\lambda y'}{1+\omega'}\cdot\omega''}{(1+\omega')^2} + f(x+\omega)\cdot\frac{\lambda y'}{1+\omega'} + \lambda g(x+\omega)\cdot y = h(x+\omega)$$

од каде, по средување по y и y'

$$\lambda y'\left[f(x+\omega)(1+\omega')^2 - f(x)(1+\omega') - \omega''\right] + \lambda y\left[g(x+\omega)(1+\omega')^3 - g(x)(1+\omega')\right] - \left[h(x+\omega)(1+\omega')^3 - \lambda h(x)(1+\omega')\right] = 0 \tag{26}$$

или

$$\lambda y'\omega'' + (1+\omega')^3\left[\lambda y\cdot g(x+\omega) - h(x+\omega)\right] + (1+\omega')^2\cdot\lambda y'\cdot f(x+\omega) + \lambda(1+\omega')\left[-y'f(x) - yg(x) + h(x)\right] = 0 \tag{27}$$

(27) е линеарна равенка од I ред по y. Ако ставиме

$$\begin{aligned} F(x) &= \lambda\cdot\left[f(x+\omega)(1+\omega')^2 - f(x)(1+\omega') - \omega''\right] \\ G(x) &= \lambda\cdot\left[g(x+\omega)(1+\omega')^3 - g(x)(1+\omega')\right] \\ H(x) &= -\left[h(x+\omega)(1+\omega')^3 - \lambda h(x)(1+\omega')\right] \end{aligned} \tag{28}$$

имаме

$$F(x)y' + G(x)y + \frac{1}{\lambda}H(x) = 0 \tag{29}$$

или

$$y' + \frac{G(x)}{F(x)} y + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{H(x)}{F(x)} = 0, \; F(x) \neq 0, \; x \in I. \tag{30}$$

При познат КП $\omega(x)$ и КПК λ, функциите $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ се определени, па (30) е квадратурно решлива, т.е.

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{G(t)}{F(t)} dt} \left[C - \frac{1}{\lambda} \int_{x_0}^{x} \frac{H(x)}{F(x)} \cdot e^{\int_{t_0}^{t} \frac{G(u)}{F(u)} du} dt \right] \tag{31}$$

Некои специјални случаи.

1. Ако $\omega' = 0$, тогаш $\omega = \text{конст.} = \omega^*$ и $\omega'' = 0$, па од (27) добиваме

$$y'\left[f(x+\omega^*) - f(x)\right] + y\left[g(x+\omega^*) - g(x)\right] - \left[\frac{1}{\lambda} h(x+\omega^*) - h(x)\right] = 0. \tag{32}$$

Ако f, g и h се КПФ со ист константен период ω^*, т.е.

$$f(x+\omega^*) = \mu f(x), \quad g(x+\omega^*) = \nu f(x), \quad h(x+\omega^*) = \eta h(x)$$

тогаш

$$F(x) = \lambda(\mu - 1) f(x), \quad G(x) = \lambda(\nu - 1) g(x), \quad H(x) = (\lambda - \eta) h(x) \tag{33}$$

па (30) има вид

$$f(x) y' + \frac{\nu - 1}{\mu - 1} \cdot g(x) y + \frac{\lambda - \eta}{\lambda(\mu - 1)} \cdot h(x) = 0 \tag{34}$$

или

$$y' + \frac{\nu - 1}{\mu - 1} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} y + \frac{\lambda - \eta}{\lambda(\mu - 1)} \cdot \frac{h(x)}{f(x)} = 0, \; f(x) \neq 0, \; \mu \neq 1 \tag{35}$$

и решението се одредува експлицитно со формулата

$$y = e^{-\frac{\nu-1}{\mu-1} \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{f(t)} dt} \left[C - \frac{\lambda - \eta}{\lambda(\mu - 1)} \int_{x_0}^{x} \frac{h(x)}{f(x)} \cdot e^{\frac{\nu-1}{\mu-1} \int_{t_0}^{t} \frac{g(u)}{f(u)} du} dt \right]. \tag{36}$$

Следува

Теорема 5. Ако (5) има КПР со константен КП, тогаш при услов f, g и h да се КПФ со ист константен КП и $f(x) \neq 0$, $\mu \neq 1$, решението е определено експлицитно во вид (36).

2. Ако $f(x)=0$, т.е. (24) е од вид

$$y''+g(x)y=h(x) \tag{37}$$

тогаш $F(x)=0$, па од (30) ја добиваме равенка

$$G(x)y+\frac{1}{\lambda}H(x)=0 \tag{38}$$

т.е.

$$y=-\frac{1}{\lambda}\frac{H(x)}{G(x)}=-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{h(x+\omega)-\lambda h(x)}{g(x+\omega)-g(x)} \tag{39}$$

Ако $\omega'=0$, т.е. $\omega=\text{конст.}=\omega^*$, $\omega''=0$, а g и h се КПФ т.е.

$$g(x+\omega^*)=\nu g(x),\quad h(x+\omega^*)=\eta h(x),$$

тогаш имаме

$$y=-\frac{\lambda-\eta}{\lambda(\nu-1)}\cdot\frac{h(x)}{g(x)}. \tag{40}$$

Од барањето y да е решение на (37), добиваме дека функциите g и h треба да ја задоволуваат и релацијата:

$$\frac{h''g-hg''-2h'g'}{hg^2}+\frac{2g'^2}{g^3}=\frac{\eta-\lambda\nu}{\lambda-\eta},\ hg^2\neq 0,\quad \lambda\neq\eta. \tag{41}$$

Следува

Теорема 6. Ако равенката (37) има КПР со константен КП, g и h се КПФ со ист константен КП и за нив важи (41), тогаш решението на (37) се определува без квадратури во вид

$$y=-\frac{\lambda-\eta}{\lambda(\nu-1)}\cdot\frac{h(x)}{g(x)}.$$

3. Нека во (24) $g(x)=0$, т.е. (24) е од вид

$$y''+f(x)y'=h(x) \tag{42}$$

Тогаш $G(x)=0$, па од (30):

$$y'=-\frac{1}{\lambda}\frac{H(x)}{F(x)}=-\frac{1}{\lambda}\frac{h(x+\omega)-\lambda h(x)}{f(x+\omega)-f(x)}. \tag{43}$$

Ако $\omega'=0$, т.е. $\omega=\text{const.}=\omega^*$, $\omega''=0$ и f и h се КПФ со ист КП, т.е.

$$f(x+\omega^*)=\mu f(x),\quad h(x+\omega^*)=\eta h(x)$$

тогаш од (43):

$$y' = -\frac{(\lambda - \eta)}{\lambda(\mu - 1)} \frac{h(x)}{f(x)}, \tag{44}$$

Бидејќи (44) е прв интеграл на (42), функциите f и h ја задоволуваат и релацијата

$$\frac{h'f - hf'}{hf^2} = \frac{\eta - \lambda\nu}{\lambda - \eta}, hf^2 \neq 0, \eta \neq \lambda . \tag{45}$$

Решението се определува со една квадратура, т.е.

$$y = C - \frac{(\lambda - \eta)}{\lambda(\mu - 1)} \int_{x_0}^{x} \frac{h(t)}{f(t)} dt \tag{46}$$

Следува

Теорема 7. Доволен услов равенката (42) да има КПР со константен КП е f и h да се КПФ со ист константен КП и да ја задоволуваат релацијата (45). Тогаш решението на (42) се определува со една квадратура во вид (46).

ЛИТЕРАТУРА

[1] P.Hartman, Ordinary differential equations, Moskva 1970 (in Russian)
[2] В.А.Якубович, В.М. Старжинский, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коеффициентами и их приложениа, Москва 1972
[3] Б.М.Левитан; В.В.Жиков, Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения, Москва 1978
[4] Э.Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Москва 1971