8 МСДР 2004, (57 - 62)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА ОБЛИКОТ НА РЕШЕНИЕТО НА ЕДНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА РАВЕНКА ОД ВТОР РЕД СО ФУНКЦИОНАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Лазо А. Димов
Машински факултет–Скопје
e–mail: ldimov@ereb1.mf.ukim.edu.mk

Апстракт

Со оглед на познатите постапки за решавање на линеарните диференцијални равенки со константни коефициенти природен е стремежот решавањето на линеарните диференцијални равенки со функционални коефициенти да се сведе на решавање на линеарни диференцијални равенки со константни коефициенти. Овде даваме еден прилог кон тој природен стремеж воедно определувајќи услови при кои линеарната диференцијална равенка од втор ред, со функционални коефициенти,

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = 0, \qquad (1)$$

може да се сведе на линеарна диференцијална равенка со константни коефициенти. Притоа добиваме дека обликот на решението на диференцијалната равенка (1) зависи од знакот на фигурирачките коефициенти $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$.

1. Познат е фактот дека решението на линеарната диференцијална равенка

$$y'' + a(x)y = 0$$

во зависност од знакот на функцијата a(x) може да се запише во следниот облик:

$$y = C_1 \sin_{a(x)} x + C_2 \cos_{a(x)} x \text{ , за } a(x) > 0,$$

$$y = C_1 sh_{a(x)} x + C_2 ch_{a(x)} x \text{ , за } a(x) < 0.$$

Исто така познато е дека равенката

$$y'' + ay = 0, \quad a - \text{const} \tag{I}$$

има решение дадено со формулите:

$$y = C_1 e^{\sqrt{a}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{a}\,x}, \text{ за } a > 0 \text{ и}$$
$$y = C_1 \sin\sqrt{-a}\; x + C_2 \cos\sqrt{-a}\; x, \text{ за } a < 0. \tag{II}$$

Овде ќе докажеме дека диференцијалната равенка (1), при одредени услови може да се сведе на диференцијална равенка од облик (I) па согласно тоа решението е од облик (II).

За таа цел воведуваме нова независно променлива величина t во равенката (1) со релацијата x = x(t). При тоа добиваме:

$$\frac{f(t)}{x'^2(t)} y''(t) + \left[\frac{g(t)}{x'(t)} - \frac{f(t)x''(t)}{x'^3(t)} \right] y'(t) + h(t)y(t) = 0 .$$

При претпоставка дека x = x(t) ги задоволува условите

$$x'^2(t) = -\frac{Af(t)}{h(t)}, \quad A - \text{const}$$
$$g(t)x'^2(t) - f(t)x''(t) = 0, \tag{2}$$

со елиминација на x = x(t) во условите (2) се добива условот:

$$2g(x)h(x) = f'(x)h(x) - f(x)h'(x) \qquad (3)$$

за сводливост на равенката (1) на равенката (I) по новата променлива t . При тоа самата функција x = x(t) се добива од релацијата

$$t = \int \sqrt{-\frac{h(x)}{Af(x)}}dx \qquad (4)$$

Со ова нешто практично ја докажавме следнава

Теорема. Диференцијалната равенка (1), со воведување на нова независно променлива величина t со релацијата (4) се трансформира во диференцијалната равенка

$$y''(t) - Ay(t) = 0. \qquad (5)$$

Сега имајќи во вид (I), (II) и релацијата (4) за решението на диференцијалната равенка (1) ги добиваме следните формули:

$$y = C_1 e^{\int\sqrt{-\frac{h(x)}{f(x)}}dx} + C_2 e^{-\int\sqrt{-\frac{h(x)}{f(x)}}dx}, \text{ за } \frac{h(x)}{f(x)} < 0$$

или

$$y = C_1 \sin\left(\int \frac{h(x)}{f(x)}dx\right) + C_2 \cos\left(\int \frac{h(x)}{f(x)}dx\right), \text{ за } \frac{h(x)}{f(x)} > 0. \qquad (6)$$

2. Овде ќе разгледаме неколку специјални случаи што произлегуваат од условот (3).

а) Ако е функцијата h(x) = c – константа, тогаш условот (3) станува

$$2g(x) = f'(x),$$

па равенката (1) е

$$f(x)y'' + \frac{1}{2}f'(x)y' + cy = 0,$$

и во согласност со (6) има решение

$$y = C_1 e^{\int \sqrt{-\frac{c}{f(x)}}dx} + C_2 e^{-\int \sqrt{-\frac{c}{f(x)}}dx}, \text{ за } \frac{c}{f(x)} < 0$$

или

$$y = C_1 \sin\left(\int \frac{c}{f(x)} dx\right) + C_2 \cos\left(\int \frac{c}{f(x)} dx\right), \text{ за } \frac{c}{f(x)} > 0.$$

б) Ако функцијата f(x) = c, тогаш условот (3) е

2g(x)h(x) = - ch'(x),

а соодветната равенка (3) станува

$$cy'' - \frac{ch'(x)}{2h(x)} y' + h(x)y = 0,$$

чие решение според (6) е од облик

$$y = C_1 e^{\int \sqrt{-\frac{h(x)}{c}}dx} + C_2 e^{-\int \sqrt{-\frac{h(x)}{c}}dx}, \text{ за } \frac{h(x)}{c} < 0$$

или

$$y = C_1 \sin\left(\int \frac{h(x)}{c} dx\right) + C_2 \cos\left(\int \frac{h(x)}{c} dx\right), \text{ за } \frac{h(x)}{c} > 0$$

Специјално ако h(x) = x и c = 1, се добива линеарната диференцијална равенка

$$xy'' - \frac{1}{2} y' + x^2 y = 0,$$

па согласно погоре, нејзиното решение може да се запише во облик

$$y = C_1 \sin \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C_2 \cos \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, \text{ за x > 0},$$

$$y = C_1 e^{\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}} + C_2 e^{-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}}, \text{ за x < 0},$$

в) Ако е g(x) = f '(x), тогаш условот (3) станува

$$f'(x)h(x) + f)x)h'(x) = 0$$

па равенката (1) е

$$f^2(x)y'' + f'(x)f(x)y' + cy = 0.$$

За обликот на нејзиното решение според (6) добиваме

$$y = C_1 e^{\int\sqrt{-\frac{c}{f^2(x)}}dx} + C_2 e^{-\int\sqrt{-\frac{c}{f^2(x)}}dx}, \text{ за } c < 0,$$

или

$$y = C_1 \sin\left(\int \frac{c}{f^2(x)}dx\right) + C_2 \cos\left(\int \frac{c}{f^2(x)}dx\right), \text{ за } c > 0$$

Специјално ако е f(x) = x, се добива Ојлеровата диференцијална равенка

$$x^2y'' + xy' + cy = 0$$

па согласно погоре нејзиното решение може да се запише во облик

$$y = C_1 \sin\sqrt{c}\ \ln|x| + C_2 \cos\sqrt{c \ln|x|}, \text{ за } c > 0,$$

$$y = C_1 |x|^{\sqrt{-c}} + C_2 |x|^{-\sqrt{-c}}, \text{ за } c < 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Беркович Л.М. Преобразование обыкновеных линейниых дифференциальных уравнений , Учебное пособие, Куйбишев 1978.
[2] Rašajski B. Teorija običnih diferencijalnih jednačina, Beograd 1970
[3] Камке Е. : Справочник по обькновеным дифференциальным уравнениям, Г.И. Москва 1951 година.
[4] Митриновиќ Д.С. : Зборник математичких проблема, Београд 1958 година.
[5] Митриновиќ Д.С. : Диференцијалне једначине зборник математичких проблема И задатака, Београд 1986 година.

ABOUT SOLVING A DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

Dimov A. Lazo

Summary

It is natural tendency to reduct the solving of a differential equation with functional coefficients to solving of a differential equation with constant coefficients. Here, we give a supplement to this natural tendency, determining conditions in which a differential equation of second order with functional coefficients is reducted to a differential equation with constant coefficients. In the same time, we determine the solution of the differential equation.

Department of Mechanical Engineering
p. fah 464
1000 Skopje
Macedonia