8 МСДР 2004, (131 - 140)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ОПЕРАТОРИ СО ОРБИТИ ШТО ТЕЖАТ КОН БЕСКОНЕЧНОСТ

Соња Манчевска, Технички факултет, Битола

Апстракт. Во овој труд се разгледуваат услови што треба да задоволува еден оператор на бесконечно-димензионален Банахов простор со спектрален радиус строго поголем од 1 за во просторот да постојат вектори чии орбити во однос на тој оператор тежат кон бесконечност.

Клучни зборови и изрази. Банахов простор, ограничен линеарен оператор, орбити, спектар, тежински поместувања, хиперцикличност.

Нека $\mathcal{X}$ е бесконечно-димензионален комплексен Банахов простор и $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ е алгебрата од сите ограничени линеарни оператори на $\mathcal{X}$. *Орбита* на векторот $x \in \mathcal{X}$ во однос на операторот $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ е множеството итерати $Orb(T,x) = \{T^n x : n \geq 0\}$. Во понатамошните разгледувања ќе бидат дадени услови под кои за даден оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ во просторот ќе постојат вектори чии орбити во однос на T тежат кон бесконечност и притоа ваквите вектори да формираат густо множество во просторот. Овие услови се однесуваат на спектралниот радиус $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ на операторот T, каде $\sigma(T)$ е спектарот на T, и на две подмножества на спектарот: точкастиот спектар $\sigma_p(T)$ и апроксимативниот точкаст спектар $\sigma_a(T)$ што се состои од сите оние $\lambda \in \sigma(T)$ за кои постои нормализирана низа вектори $(x_n)_{n\geq 1}$ таква што $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0$ кога $n \to \infty$ (ваквата низа се уште се нарекува *низа од скоро сопствени вектори* за λ). Напоменуваме дека за секој $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ е исполнето ([3], пропозиција VII.6.7.) $\varnothing \neq \partial\sigma(T) \cup \sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T)$.

Општите резултати што ќе бидат презентирани во продолжение се мотивирани и засновани на резултатите на B. Beauzamy изложени во [1]. Првиот резултат, лема 1, е формулирана и докажана врз основа на доказот на пропозиција [1].II.1.13. Вториот резултат, лема 2, е модификација на лема [1].III.2.A.6 направена со цел да се даде детален доказ на теорема [1].III.2.A.5; резултатот од оваа теорема, со мала измена во заклучокот, е формулиран во теорема 3 подолу и за истата е приложен комлетен доказ.

Лема 1. Ако $\mathcal{X}$ е рефлексивен Банахов простор, $T\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ и $\lambda\in\sigma_a(T)\setminus\sigma_p(T)$, тогаш секоја низа од скоро сопствени вектори за λ е слаба нула низа.

Доказ. Нека $(x_n)_{n\geq 1}$ е низа од скоро сопствени вектори за $\lambda\in\sigma_a(T)\setminus\sigma_p(T)$. Бидејќи во случај на рефлексивен Банахов простор, *ball* $\mathcal{X}=\{x\in\mathcal{X}:\|x\|\leq 1\}$ е слабо компактно (теорема на *Alaoglu*), постојат вектор $x\in ball\,\mathcal{X}$ и подниза $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ на $(x_n)_{n\geq 1}$ така што $x_{n_k}\to x(wk)$, каде wk е слабата топологија на $\mathcal{X}$. Тогаш $Tx_{n_k}-\lambda x_{n_k}\to Tx-\lambda x(wk)$ и, поради $\|Tx_n-\lambda x_n\|\to 0$ кога $n\to\infty$, $Tx_{n_k}-\lambda x_{n_k}\to 0(wk)$. Но во случај на Банахови простори wk е *Hausdorffov*-ова топологија, што значи дека $Tx-\lambda x=0$. Ова заедно со $\lambda\notin\sigma_p(T)$, ќе даде $x=0$. Со тоа добивме дека $x=0$ е всушност единствената точка на натрупување за низата $(x_n)_{n\geq 1}$ во однос на wk. Ова, заедно со слабата компактност на *ball* $\mathcal{X}$, имплицира $x_n\to 0\,(wk)$. ■

Лема 2. Ако $(z_n)_{n\geq 1}$ е слаба нула низа во Банаховиот простор $\mathcal{X}$, тогаш за секој вектор $z\in\mathcal{X}$

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty}\|z+z_n\|\geq\|z\|$;

(b) ако $\|z_n\|\to\alpha$ кога $n\to\infty$, тогаш

$$\limsup_{n\to\infty}\|z+z_n\|\geq\max\{\alpha/2\,,\|z\|\}.$$

Доказ. При условите во лемата, $x^*(z_n)\to 0$ кога $n\to\infty$ за секој ограничен линеарен функционал $x^*\in\mathcal{X}^*$. Ако притоа $\|x^*\|\leq 1$, тогаш

$$|x^*(z)|=\lim_{n\to\infty}|x^*(z+z_n)|\leq\limsup_{n\to\infty}\|z+z_n\|\quad\Rightarrow$$
$$\|z\|=\sup\{|x^*(z)|:x^*\in\mathcal{X}^*,\|x^*\|\leq 1\}\leq\limsup_{n\to\infty}\|z+z_n\|,$$

со што е докажано (a). Нека сега $\|z_n\|\to\alpha$ кога $n\to\infty$. За $\|z_n\|>\alpha/2$, тврдењето (b) ќе следи од (a), а ако $\|z_n\|\leq\alpha/2$, тогаш $\|z_n\|-\alpha/2\leq\|z+z_n\|+\|z\|-\alpha/2\leq\|z+z_n\|$ за секој $n\geq 1$, што имлицира $\alpha/2=\lim\limits_{n\to\infty}(\|z_n\|-\alpha/2)\leq\limsup\limits_{n\to\infty}\|z+z_n\|$. ■

ТЕОРЕМА 3. Нека $\mathcal{X}$ е рефлексивен Банахов простор. Ако за операторот $T\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ кружницата $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = r\}$, каде $r = r(T)$, содржи точка од $\sigma(T)\setminus\sigma_p(T)$, тогаш за секоја низа позитивни броеви $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ таква што $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n < +\infty$, во секоја топка од просторот со радиус строго поголем од $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ постои вектор $y\in\mathcal{X}$ таков што

$$\|Ty\| \geq \frac{1}{2}\alpha_n r^n \text{, за секој } n\geq 1 .$$

ДОКАЗ. Ако $\lambda\in\sigma(T)\setminus\sigma_p(T)$ е таков што $|\lambda| = r$, тогаш $\lambda\in\partial\sigma(T)\setminus\sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T)\setminus\sigma_p(T)$, па според лема 1, постои низа вектори $(x_n)_{n\geq 1}$ во $\mathcal{X}$ со особини:

(a) $\|x_n\| = 1$ за секој $n\geq 1$;

(b) $\| Tx_n - \lambda x_n \|\to 0$ кога $n\to\infty$;

(c) $x_n \to 0\,(wk)$.

Тогаш

$$\| T^k x_n - \lambda^k x_n \|\to 0 \text{ и } \|T^k x_n\|\to r^k \text{ кога } n\to\infty \text{, за секој } k\geq 1 . \quad (1)$$

Нека $x\in\mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$ се произволни и $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ е низата од условот во теоремата.

I. Според (1) за $k = 1$ и (c), за низата $((1+\varepsilon)\alpha_1 Tx_n)_{n\geq 1}$ важи $\| (1+\varepsilon)\alpha_1 Tx_n \|\to (1+\varepsilon)\alpha_1 x_n$ кога $n\to\infty$ и $(1+\varepsilon)\alpha_1 Tx_n \to 0(wk)$, што според лема 2.$(b)$ имплицира

$$\sup_{n\geq 1}\|T(x+(1+\varepsilon)\alpha_1 x_n)\| \geq \limsup_{n\to\infty}\|T(x+(1+\varepsilon)\alpha_1 x_n)\| \geq$$
$$\geq \max\left\{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\alpha_1 r, \|Tx\|\right\} > \frac{1}{2}\alpha_1 r .$$

Тогаш постои $n_1 \geq 1$ така што за векторот $y_1 = x+(1+\varepsilon)\alpha_1 x_{n_1}$ да важи $\|Ty_1\| \geq \frac{1}{2}\alpha_1 r$.

II. Нека претпоставиме дека за некој $k\geq 2$ се најдени природни броеви $n_1 < ... < n_{k-1}$ такви што за векторите

$$y_l = x+(1+\varepsilon)\alpha_1 x_{n_1} + ... + \alpha_l x_{n_l}) \text{, } 1\leq l\leq k-1$$

да важи

$$\|T^j y_l\| > \frac{1}{2}\alpha_j r^j \text{, за секои } 1\leq j\leq l\leq k-1 . \quad (2)$$

III. Ја разгледуваме низата вектори $(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_n)_{n\geq 1}$.

Тврдење 4. Постојат стого растечки низи $(N_j(n))_{n\geq 1}$, $1\leq j\leq k-1$ во $\mathbb{N}$ такви што

$$\left\|T^j(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_j(n))\ldots)})\right\|>\frac{1}{2}\alpha_j r^j \text{ за секои } 1\leq j\leq k-1 \text{ и } n\geq 1. \quad (3)$$

Доказот на ова тврдење го спроведуваме со индукција:

i) Според (c) имаме $(1+\varepsilon)\alpha_1 Tx_n\to 0(wk)$. Од индуктивната претпоставка II. (2), за $j=1$ и $l=k-1$, како и лема 2. (a), добиваме

$$\sup_{n\geq m}\left\|T(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_n)\right\|\geq \limsup_{n\to\infty}\left\|T(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_n)\right\|\geq\left\|Ty_{k-1}\right\|>$$
$$>\frac{1}{2}\alpha_1 r,\ \forall m\geq 1.$$

Ова дозволува да се најде строго растечка низа $(N_1(n))_{n\geq 1}$ во $\mathbb{N}$ така што

$$\left\|T(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(n)})\right\|>\frac{1}{2}\alpha_1 r,\text{ за секој } n\geq 1.$$

ii) Нека се најдени строго растечките низи $(N_j(n))_{n\geq 1}$ во $\mathbb{N}$ за $1\leq j\leq s$, каде $s\leq k-2$, а притоа неравенството во (2) да важи за секој $1\leq j\leq s$.

iii) Низата $(x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)})_{n\geq 1}$ како подниза на $(x_n)_{n\geq 1}$ е исто така слаба нула низа, што имплицира $(1+\varepsilon)\alpha_k T^{s+1}x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)}\to 0(wk)$, и последователно

$$\limsup_{n\to\infty}\| T^{s+1}(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)})\|\geq\| T^{s+1}y_{k-1}\|>\frac{1}{2}\alpha_{s+1}r^{s+1},\forall m\geq 1.$$

Тогаш

$$\sup_{n\geq m}\| T^{s+1}(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)})\|>\frac{1}{2}\alpha_{s+1}r^{s+1},\text{ за секој } m\geq 1$$

што дозволува да се најде строго растечка низа $(N_{s+1}(n))_{n\geq 1}$ во $\mathbb{N}$ така што

$$\| T^{s+1}(y_{k-1}+(1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_s(n))\ldots)})\|>\frac{1}{2}\alpha_{s+1}r^{s+1}\text{ за секој } n\geq 1.\ \blacklozenge$$

Продолжуваме со доказот на теоремата.

Бидејќи $(x_{N_1(\ldots(N_{k-1}(n))\ldots)})_{n\geq 1}$ е подниза на $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$\|(1+\varepsilon)\alpha_k T^k x_{N_1(\ldots(N_{k-1}(n))\ldots)})\|\to(1+\varepsilon)\alpha_k r^k \text{ кога } n\to\infty \text{ и}$$

$$(1+\varepsilon)\alpha_k T^k x_{N_1(\ldots(N_{k-1}(n))\ldots)}) \to 0(wk),$$

па според лема 2. (b)

$$\limsup_{n\to\infty} \| T^k (y_{k-1} + (1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_{k-1}(n))\ldots)}) \| \geq$$

$$\geq \max\left\{\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\alpha_k r^k, \| T^k y_{k-1} \|\right\} > \frac{1}{2}\alpha_k r^k . \qquad (4)$$

Нека $m_k \in \mathbb{N}$ е таков што $N_1(\ldots(N_{k-1}(m_k))\ldots) \geq n_{k-1}+1$. Тогаш според (4)

$$\sup_{n\geq m_k} \| T^k (y_{k-1} + (1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_{k-1}(n))\ldots)}) \| > \frac{1}{2}\alpha_k r^k ,$$

па постои $n_k' \geq m_k$ така што

$$\| T^k (y_{k-1} + (1+\varepsilon)\alpha_k x_{N_1(\ldots(N_{k-1}(n_k'))\ldots)}) \| > \frac{1}{2}\alpha_k r^k . \qquad (5)$$

Нека $n_k = N_1(\ldots(N_{k-1}(n_k'))\ldots)$. Бидејќи низите $(N_j(n))_{n\geq 1}$ се строго растечки и $n_k' \geq m_k$, ќе важи $n_k \geq N_1(\ldots(N_{k-1}(m_k))\ldots) \geq n_{k-1}+1$.

Нека $y_k = y_{k-1} + (1+\varepsilon)\alpha_k x_{n_k}$. Тогаш, според (5) за $j = k-1$ и $n = n_k'$, односно според (3) за $j \in \{1,\ldots,k-2\}$ и $n = N_{j+1}(\ldots(N_{k-1}(n_k'))\ldots)$,

$$\left\| T^j y_k \right\| > \frac{1}{2}\alpha_j r^j \text{ за секој } 1 \leq j \leq k . \qquad (6)$$

Од I. - III. според принципот на математичка индукција следи дека постои строго растечка низа $(n_k)_{k\geq 1}$ во $\mathbb{N}$ така што за векторите $y_k = x + (1+\varepsilon)(\alpha_1 x_{n_1} + \ldots + \alpha_k x_{n_k})$, $k \geq 1$ да важи (6), и тоа за секој $k \geq 1$. За вака најдените вектори $(y_k)_{k\geq 1}$, поради условот $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$ и (a), $\left\| y_n - y_m \right\| \leq (1+\varepsilon)(\alpha_{\min\{m,n\}+1} + \ldots + \alpha_{\max\{m,n\}}) \to 0$ кога $m,n \to \infty$, што значи дека $(y_k)_{k\geq 1}$ е Кошиева низа. Тогаш постои $y \in \mathcal{X}$ така што $y = \lim_{k\to\infty} y_k = x + (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_{n_k}$. Притоа

$$\left\| y - x \right\| = (1+\varepsilon)\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_{n_k} \right\| \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_k \right| < (1+2\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_k \right|$$

и, според (6) $\left\| T^n y \right\| = \lim_{k\to+\infty} \left\| T^n y_k \right\| \geq \frac{1}{2}\alpha_n r^n$ за секој $n \geq 1$. ■

ПОСЛЕДИЦА 5. Ако операторот T е со спектрален радиус $r = r(T) > 1$, тогаш при условите во теорема 2.1 во просторот постои густо множество вектори чии орбити тежат кон бесконечност.

Доказ. За дадени $x \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ и произволно избран $1 < q < r$ дефинираме низа $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ со

$$\alpha_n = \varepsilon(q-1)(1+2\varepsilon)^{-1} q^{-n}, \, n\geq 1.$$

Тогаш

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \varepsilon(1+2\varepsilon)^{-1} \text{ и } \alpha_n r^n \to \infty \text{ кога } n \to \infty,$$

и последователно за векторот конструиран во предходниот доказ важи $\|y - x\| < \varepsilon$ и $\|T^n y\| \to \infty$ кога $n \to \infty$. ■

Напоменуваме дека во случај кога при $r = r(T) > 1$ постои $\lambda \in \sigma_p(T)$ таков што $1 < |\lambda| \leq r$, тогаш за секој ненулти вектор $x \in \ker(T - \lambda) \neq \{0\}$, орбитата $Orb(T, x)$ тежи кон бесконечност: $\| T^n x \| = |\lambda|^n \| x \| = r^n \| x \| \to \infty$ кога $n \to \infty$.

Теорема 6. Ако $\mathcal{X}$ е Банахов простор (не задолжително рефлексивен) и за $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ постои нормализирана слаба нула низа $(x_n)_{n\geq 1}$ со особина: за секој $k \geq 1$ постои λ_k така што $\|T^k x_n\| \to \lambda_k$ кога $n \to \infty$, тогаш за секоја низа позитивни броеви $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ таква што $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$, во секоја топка од просторот со радиус строго поголем од $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ постои вектор $y \in \mathcal{X}$ за кој $\|T^n y\| \geq \alpha_n \lambda_n / 2$, за секој $n \geq 1$. Ако притоа $\alpha_n \lambda_n \to \infty$ кога $n \to \infty$, тогаш во просторот постои густо множество вектори чии орбити тежат кон бесконечност. ■

Доказот на теорема 6 се спроведува на сосема истиот начин како оној на теорема 3, само наместо низата r^n на соодветното место ќе стои λ_n.

За крај, како илустрација на предходните резултати ќе дадеме уште еден едноставен пример на оперетор. Бидејќи истиот е модификација на едни од наједноставните примери на хиперциклични оператори што му се познати на авторот, заради комплетност во теорема 7.В.(c) ќе биде покажано и ова негово својство. Операторот $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ се нарекува *хиперцикличен оператор* ако постои вектор $x \in \mathcal{X}$ таков што $Orb(T, x)$ е густа во целиот простор, ваквиот вектор уште се нарекува *хиперцикличен вектор* за операторот T. Да напоменеме дека ако T е хиперцикличен оператор, тогаш множеството од сите хиперциклични вектори е густо G_δ множество во просторот ([1], гл.III , §5). За подетални информации за хиперцикличноста читателот се упатува на [1], [2], [4]-[8].

Пример 7. Го разгледуваме Банаховиот простор c_0 од сите нула низи од комплексни броеви $x=(x_k)_{k\geq 0}$ со супремум нормата $\|x\|_\infty = \sup_{k\geq 0}|x_k|$ и, за $1\leq p<\infty$ просторите $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ од сите низи комплексни броеви $x=(x_k)_{k\geq 0}$ такви што $\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p<\infty$, со ℓ^p – нормата $\|x\|_p = (\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p<\infty)^{1/p}$. Нека $\{e_k : k\geq 0\}$ е заедничката канонска база за овие простори.

За дадени $r>0$ и низа $w=(w_k)_{k\geq 1}$ во кружницата $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ дефинираме тежинско поместување наназад T_w со

$$T_w e_0 = 0 \quad \text{и} \quad T_w e_k = w_k e_{k-1} \ \text{ за } k\geq 1 . \tag{1}$$

Бидејќи низата $w=(w_k)_{k\geq 1}$ е ограничена $T_w\in\mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{N}_0))$, $T_w\in\mathcal{B}(c_0)$ и притоа $\|T_w\|\leq r$. Од друга страна, за дадено $n\geq 1$

$$T_w{}^n e_k = \begin{Bmatrix} 0 & \text{, ако } \ k<n \\ w_k w_{k-1}\ldots w_{k-n+1}e_{k-n} & \text{, ако } k\geq n \end{Bmatrix} \ , \tag{2}$$

од каде следи дека

$$\left\|T_w{}^n e_k\right\|_p = |w_k w_{k-1}\ldots . w_{k-n+1}| = \left\|T_w{}^n e_k\right\|_\infty = r^n \ \text{ за секој } k\geq n ,$$

што заедно со $\|T_w\|\leq r$ и дефиницијата на норма на оператор, имплицира дека $\left\|T_w{}^n\right\| = r^n$ за секој $n\geq 1$, и последователно

$$r(T_w) = \lim_{n\to\infty}\left\|T_w{}^n\right\|^{1/n} = r \ \text{ и } \ \sigma(T_w)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = r\} \ .$$

Ако $\lambda\in\mathbb{C}$ е таков што $|\lambda| = r$, тогаш

$$x_\lambda = e_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(w_1 w_2 \ldots w_k)^{-1}\lambda^k e_k \in \ell^p(\mathbb{N}_0)\subseteq c_0$$

и притоа $T_w x_\lambda = \lambda x_\lambda$. Бидејќи $x_\lambda\neq 0$, последното имплицира дека $\lambda\in\sigma_p(T)$.

Ако $\lambda\in\mathbb{C}$ е таков што $|\lambda| = r$, и векторот $x=\sum_{k=1}^{\infty}x_k e_k$ е таков што $T_w x = \lambda x$, тогаш $w_k x_k = \lambda x_{k-1}$ за секој $k\geq 1$ што, поради изборот на низата $w=(w_k)_{k\geq 1}$, ќе имплицира $|x_k| = |x_{k-1}|$ за секој $k\geq 1$. Ова, при $x\in\ell^p(\mathbb{N}_0)$ или $x\in\ell^p(c_0)$ (поради $\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p<\infty$, односно $x_k\to 0$ кога $k\to\infty$) е можно само доколку $x_k = 0$ за секој $k\geq 1$, т.е. $x=0$. Од тука следи дека кружницата $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ не содржи сопствени вредности за T_w.

Сумирајќи ги предходните резултати ја добиваме следната

Пропозиција 7.А. Тежинското поместување station наназад T_w дефинирано со (1) е ограничен линеарен оператор на просторите c_0 и $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, $1 \le p < \infty$ и притоа:

(a) за секој $n \ge 1$, $\left\|T_w{}^n\right\| = r^n$ и $r(T_w) = \lim_{n\to\infty}\left\|T_w{}^n\right\|^{1/n} = r$;

(b) $\sigma_p(T_w) = \{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ и $\sigma(T_w) = \{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| \le r\} = \sigma_a(T_w)$. ■

Теорема 7.B. Ако $r > 1$ и $1 < p < \infty$, тогаш за тежинското поместување наназад T_w дефинирано со (1) во секој од просторите c_0 и $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ постои

(a) густо множество вектори x такви што $\left\|T_w{}^n x\right\| \to \infty$ кога $n \to \infty$;

(b) густо множество вектори x такви што $\left\|T_w{}^n x\right\| \to 0$ кога $n \to \infty$;

(c) густо G_δ множество вектори x такви што $Orb(T_w, x)$ е густа во целиот простор.

Доказ. (a) Бидејќи секој од просторите $\ell^p(\mathbb{N}_0)$, $1 < p < \infty$ е рефлексивен Банахов простор, точноста на тврдењето за овие простори следи од предходната пропозиција и теорема 3, односно последица 5.

За да се покаже тврдењето за просторот c_0 нека $(x^{(n)})_{n\ge1}$ е низата дефинирана со $x^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} e_k$. Тогаш за секој $n \ge 1$, $\left\|x^{(n)}\right\|_\infty = 1$ и за секој линеарен функционал

$$a = (a_k)_{k\ge0} \in \ell^1 = c_0{}^*,\ \left|a(x_n)\right| = \left|\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{\infty}\left|a_k\right| \to 0 \text{ кога } n \to \infty,$$

што значи дека $(x^{(n)})_{n\ge1}$ е слаба нула низа во c_0. Натаму,

$$T_w{}^m x^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} w_k w_{k-1} \ldots w_{k-m+1} e_{k-m},$$

и последователно

$$\left\|T_w{}^m x^{(n)}\right\|_\infty = \sup\{| w_k w_{k-1} \ldots w_{k-m+1} | : k \ge n\} = r^m \text{ за секои } n \ge m \ge 1.$$

Тогаш за секој $m \ge 1$ постои

$$\lambda_m = \lim_{n\to\infty}\left\|T_w{}^m x^{(n)}\right\|_\infty = r^m .$$

Дефинирајќи сега низа $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ како во доказот на последица 5, точноста на тврдењето за просторот c_0 ќе следи од теорема 6.

(b) Нека $\mathcal{L} = span\{e_k : k \geq 0\}$ е на густиот векторски потпростор c_0 и $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ генериран од векторите $\{e_k : k \geq 0\}$, т.е. векторскиот потпростор од сите конечни линеарни комбинации овие вектори. Бидејќи за секој $y\in\mathcal{L}$ постои $n(y)\in\mathbb{N}_0$ така што $y \in span\{e_k : 0 \leq k \leq n(y)\}$, според (2) $\|{T_w}^n x\|_\infty = 0$ за секој $n \geq n(y)$, и последователно $\|{T_w}^n x\|_\infty \to 0$ кога $n \to \infty$.

(c) За да се покажи дека T_w е хиперцикличен оператор нека $S_{1/w}$ е тежинското поместување на c_0 и $\ell^p(\mathbb{N}_0)$ дефинирано со: $S_{1/w}e_k = w_{k+1}^{-1}e_{k+1}$, $k \geq 0$. Тогаш

i) $S_{1/w} \in \mathcal{B}(\ell^p(\mathbb{N}_0))$, $S_{1/w} \in \mathcal{B}(c_0)$ и

$$\|{S_{1/w}}^n\| = \sup_{k\geq 0} |(w_k w_{k+1} \dots w_{k+n-1})^{-1}| = 1/r^n, \text{ за секој } n \geq 1,$$

и последователно, за секој вектор y од овие простори $Orb(S_{1/w}, y)$ тежи кон 0.

ii) $T_w S_{1/w} e_k = T_w(w_{k+1}^{-1}e_{k+1}) = w_{k+1}w_{k+1}^{-1}e_k = e_k$ за секој $k \geq 0$, што имплицира дека $T_w S_{1/w} = I$, каде I е идентичниот оператор.

Сега го применуваме следниот резултат ([2], пропозиција 2.2.) за $X_0 = Y_0 = \mathcal{L}$.

Критериум за хиперцикличност. Ако $\mathcal{X}$ е сепарабилен Банахов простор, $T\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ и постои строго растечка низа природни броеви $(n_j)_{j\geq 1}$ $(n_j)_{j\geq 1}$ за која

(a) постои густо множество X_0 во $\mathcal{X}$ така што $\|T^{n_j}x\| \to 0$ кога $j \to \infty$ за секој $x \in X_0$;

(b) постои густо множество Y_0 во $\mathcal{X}$ и пресликување $S : Y_0 \to Y_0$ (не задолжително линеарно и не задолжително непрекинато) така што

$$\|S^{n_j}y\| \to 0 \text{ кога } j \to \infty \text{ за секој } y \in Y_0 \text{ и } T|_{Y_0} \circ S = I|_{Y_0};$$

тогаш T е хиперцикличен оператор. ■

Да напоменеме уште дека тврдењата (b) и (c) од предходната теорема важат и за просторот ℓ^1, но теорема 6 не е применлива на овој простор. Според теорема на *Schur* ([3],V.5.2 и [9], стр.348), за секоја низа $(x_n)_{n\geq 1}$ во ℓ^1 условите „$x_n \to 0(wk)$ “ и „$\|x_n\| \to 0$ кога $n \to \infty$“, се еквивалентни. Ова значи дека во ℓ^1 во однос ℓ^1 – нормата не постои низа $(x_n)_{n\geq 1}$ така што $\|x_n\| = 1$, $n \geq 1$ а притоа $x_n \to 0(wk)$.

Литература

[1] B. Beauzamy: *Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces*, Nort-Holand, New York, 1988;

[2] K. C. Chan; J. H. Shapiro: *The Cyclic Behaviour of Translation Operators on Hilbert Spaces of Entire Functions*, Indiana Math.J., 40 (1991) pp.1421-1449;

[3] J. B. Conway: *A Course in Functional Analysis,* Springer-Verlag , New York, 1985;

[4] N. S. Feldman: *Hypercyclicity and Supercyclicity for Invertable Bilateral Weighted Shifts*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003) pp 479-485;

[5] N. S. Feldman: *Linear Chaos?*, preprint;

[6] S. Grivaux: *Construction of operators with prescribed behaviour*, Archiv der Mat. 81 (2003) pp 291-299;

[7] S. Grivaux: *Sums of hypercyclic operators*, J.Func.Anal. 202 (2003) pp 486-503;

[8] S. Grivaux: *Hypercyclic operators with infinite dimensional closed subspaces of periodic points*, to appear in Rev.Mat. Complut. .

[9] S. Kurepa: *Funkcionalna analiza, elementi teorije operatora*, II izd. Školska knjiga, Zagreb, 1990.

e-mail: sonjamanchevska@yahoo.com
sonjamanchevska@uklo.edu.com