8 МСДР 2004, (109 - 120)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ГЕНЕРАЛИЗИРАН *n*-СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

Ристо Малчески, Факултет за општествени науки, Скопје

Апстракт. Во оваа работа, користејќи ги Gateaux изводи на $n-$нормата е дадена една генерализација на поимот за $n-$скаларен производ и се докажани повеќе својства во врска со оваа генерализација.

Поимите $n-$норма и $n-$скаларен производ се воведени од A. Misiak ([3]), како што следува.

Нека L е реален векторски простор со димензија поголема или еднаква на n, $n>1$ и $\|*,....,*\|$ е реална функција на L^n за која важат условите

i) $\| x_1, x_2, ..., x_n \| \geq 0$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ и $\| x_1, x_2, ..., x_n \| = 0$ ако и само ако множеството $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ е линеарно зависно;

ii) $\| x_1, ..., x_n \| = \| \pi(x_1), ..., \pi(x_n) \|$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ и за секоја биекција $\pi : \{x_1, x_2, ..., x_n\} \to \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

iii) $\| \alpha x_1, x_2, ..., x_n \| = |\alpha| \cdot \| x_1, x_2, ..., x_n \|$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ и за секој $\alpha \in \mathbf{R}$.

iv) $\| x_1 + x_1^{'}, x_2, ..., x_n \| \leq \| x_1, x_2, ..., x_n \| + \| x_1^{'}, x_2, ..., x_n \|$, за секои $x_1, ..., x_n, x_1^{'} \in L$.

Функцијата $\|*,....,*\|$ се нарекува $n-$норма на L, а $(L, \|*,....,*\|)$ се нарекува реален $n-$нормиран простор.

Нека n е природен број, L е реален векторски простор таков што $\dim L \geq n$ и $(*,*|*,....,*)$ е реална функција на L^{n+1} таква што

i) $(a, a \,|\, x_1, ..., x_{n-1}) \geq 0$, за секои $a, x_1, ..., x_{n-1} \in L$ и $(a, a \,|\, x_1, ..., x_{n-1}) = 0$ ако и само ако $a, x_1, ..., x_{n-1}$ се линеарно зависни;

ii) $\left(a,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right)=\left(\varphi(a),\varphi(b)\,|\,\pi(x_1),...,\pi(x_{n-1})\right)$, за секои $a,b,x_1,...,x_{n-1}\in L$ и за секои биекции

$$\pi:\left\{x_1,...,x_{n-1}\right\}\to\left\{x_1,...,x_{n-1}\right\},\quad \varphi:\{a,b\}\to\{a,b\};$$

iii) за секои $a,x_1,x_2,...,x_{n-1}\in L$ важи

$$\left(a,a\,|\,x_1,x_2...,x_{n-1}\right)=\left(x_1,x_1\,|\,a,x_2...,x_{n-1}\right);$$

iv) за секои $a,b,x_1,...,x_{n-1}\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ важи

$$\left(\alpha a,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right)=\alpha\left(a,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right);\text{ и}$$

v) за секои $a,b,a_1,x_1,...,x_{n-1}\in L$ важи

$$\left(a+a_1,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right)=\left(a,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right)+\left(a_1,b\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right),.$$

Функцијата $\mathbf{(*,*|*,....,*)}$ се нарекува *n*-скаларен производ, а $\mathbf{(}L\mathbf{,(*,*|*,....,*))}$ се нарекува *n*-предхилбертов простор.

Да забележиме дека ако $n-$нормираниот простор е $n-$предхилбертов, тогаш

$$(a,a\,|\,x_1,...,x_{n-1})=\|a,x_1,...,x_{n-1}\|,\text{ за секои } a,x_1,...,x_{n-1}\in L.$$

Нека $\mathbf{(}L\mathbf{,\|*,....,*\|)}$ е реален *n*-нормиран простор и $\phi:L\text{ x ... x }L\to\mathbf{R}$ е произволен *n*-функционал.

Десен парцијален извод на *n*-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y е

$$\phi_{1^+}^{'}(x_1,...,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,...,x_n)-\phi(x_1,x_2,...,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Лев парцијален извод на *n*-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y е

$$\phi_{1^-}^{'}(x_1,...,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^-}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,...,x_n)-\phi(x_1,x_2,...,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Ако левиот и десниот парцијален извод на *n*-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y постојат и се еднакви, тогаш ќе велиме дека *n*-функционалот ϕ е диференцијабилен по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y, т.е. постои $\phi_1^{'}(x_1,...,x_n)(y)$, при што

$$\phi_1'(x_1,...,x_n)(y) = \phi_{1^+}'(x_1,...,x_n)(y) = \phi_{1^-}'(x_1,...,x_n)(y).$$

Аналогно се дефинираат парцијалните изводи

$$\phi_i'(x_1,...,x_n)(y),\ \ \phi_{i^+}'(x_1,...,x_n)(y) \text{ и } \phi_{i^-}'(x_1,...,x_n)(y),\ \ i = 2,3,...,n.$$

Во [2] е разгледан n-функционалот $\varphi : L \text{ x} ... \text{x } L \to R$, дефиниран со

$$\varphi(x_1,...,x_n) = \|x_1,...,x_n\|,$$

и неговата диференцијабилност. Притоа, за функцијата

$$\delta_1(x_1,...,x_n,y,t) = \frac{\|x_1+ty,x_2,...,x_n\| - \|x_1,x_2,...,x_n\|}{t},\quad x_1,x_2,...,x_n,y \in L \text{ и } t \in \mathbf{R}$$

докажани се следниве тврдења.

Лема 1. Функцијата $t \to \delta_1(x_1,...,x_n,y,t)$ е монотоно растечка за $t > 0$. ♦

Последица 1. Функцијата $t \to \delta_1(x_1,...,x_n,y,t)$ е монотоно растечка за $t < 0$. ♦

Лема 2. На интервалот $(0,\infty)$ функцијата $t \to \delta_1(x_1,...,x_n,y,t)$ е ограничена и важи

$$-\|-y,x_2,...,x_n\| \le \delta_1(x_1,...,x_n,y,t) \le \|y,x_2,...,x_n\|. \ ♦$$

Забелешка. Аналогно, може да се докаже дека на интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ функциите

$$t \to \delta_i(x_1,...,x_n,y,t) = \frac{\|x_1,...,x_{i-1},x_i+ty,x_{i+1},...,x_n\| - \|x_1,...,x_n\|}{t},\ \ i = 2,3,...,n$$

се монотоно растечки и дека на интервалот $(0,\infty)$ се ограничени, при што важат оценките

$$-\|-y,x_2,...,x_n\| \le \delta_i(x_1,...,x_n,y,t) \le \|y,x_2,...,x_n\|,\ \ i = 2,3,...,n.$$

Последица 2. Нека $(L, \|*,....,*\|)$ е реален n-нормиран простор. Тогаш постои

$$\varphi_{1^+}'(x_1,...,x_n)(y) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x_1+ty,x_2...,x_n\| - \|x_1,...,x_n\|}{t},$$

и важи

$$-\|-y,x_2,...,x_n\| \le \varphi_{1^+}'(x_1,...,x_n)(y) \le \|y,x_2,...,x_n\|. \ ♦$$

Теорема 1. За секои $x_1,x_2,...,x_n,y,y' \in L$ важат следниве својства:

i) $\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y+y') \le \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y) + \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y');$

ii) За секој $\alpha > 0$ важи $\varphi'_{1^+}(\alpha x_1,...,x_n)(y) = \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y);$

iii) Засекој $\alpha \ge 0$ важи $\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y);$

iv) Засекој $\alpha \ge 0$ важи $\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(\alpha x_1) = \alpha\|x_1,...,x_n\|;$ и

v) $\|x_1+ty, x_2,...,x_n\| \ge \|x_1,x_2,...,x_n\|,$ за секој $t \in \mathbf{R}$ ако и само ако

$$-\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(-y) \le 0 \le \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y). \ \blacklozenge$$

Лема 3. За секои $x_1,...,x_n, y \in L$ важи

$$-\varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(-y) = \varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y). \ \blacklozenge$$

Последица 3. За секои $x_1,...,x_n, y, y' \in L$ важат следните својства

i) $-\|y,x_2,...,x_n\| \le \varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y) \le \|y,x_2,...,x_n\|$;

ii) $\varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y) + \varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y') \le \varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y+y');$

iii) За $\alpha < 0,$ $\varphi'_{1^+}(\alpha x_1,x_2,...,x_n)(y) = -\varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y);$

iv) За $\alpha \le 0,$ $\varphi'_{1^+}(x_1,x_2,...,x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y);$

v) $\varphi'_{1^-}(x_1,...,x_n)(y) \le \varphi'_{1^+}(x_1,...,x_n)(y). \ \blacklozenge$

Теорема 2. Ако *Gateaux* извод на *n*-нормата по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ по правец *y* постои, тогаш точни се следните тврдења

i) $\varphi'_1(x_1,...,x_n)(y+y') = \varphi'_1(x_1,...,x_n)(y) + \varphi'_1(x_1,...,x_n)(y');$

ii) $\varphi'_1(x_1,...,x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_1(x_1,...,x_n)(y),$ за секој реален број α;

iii) $\varphi'_1(\alpha x_1,x_2,...,x_n)(y) = \operatorname{sgn}(\alpha)\varphi'_1(x_1,...,x_n)(y),$ за секој реален број $\alpha \ne 0$;

iv) $|\varphi'_1(x_1,...,x_n)(y)| \le \|y,x_2,...,x_n\|;$ и

v) $\varphi'_1(x_1,...,x_n)(\alpha x_1) = \alpha\|x_1,...,x_n\|. \ \blacklozenge$

1. Глатки (мазни) *n*-нормирани простори

n-нормираниот векторски простор $(L,\|*,....,*\|)$ го нарекуваме *мазен* (*гладок*) ако за секој $x \neq 0$ и за секои линеарно независни вектори $x_1,...,x_{n-1} \in L$ такви што $P(x) \cap P(x_1,...,x_{n-1}) = \{0\}$ n-нормата е Gateaux диференцијабилна по x во точката $(x, x_1,...,x_{n-1})$ по секој правец y.

Забелешка. Во претходната дефиниција претпоставивме дека $x \neq 0$ и $P(x) \cap P(x_1,...,x_{n-1}) = \{0\}$. Овие претпоставки се неопходни бидејќи:

- ако $x = 0$ и векторите $x_1,...,x_{n-1}$ се линеарно независни, тогаш постои $y_0 \in L$ таков што $\|y_0, x_1,...,x_{n-1}\| \neq 0,$ па затоа

$$\begin{aligned}\varphi'_{1^+}(x, x_1,...,x_{n-1})(y_0) = \|y_0, x_1,...,x_{n-1}\| &\neq -\|y_0, x_1,...,x_{n-1}\| \\ &= \varphi'_{1^-}(x, x_1,...,x_{n-1})(y_0)\end{aligned},$$

т.е. n-нормата не е Gateaux диференцијабилна по $x = 0$ во точката $(x, x_1,...,x_{n-1})$ по правецот y_0, и

- ако $z \neq 0$ и ако $z \in P(x) \cap P(x_1,...,x_{n-1}) \neq \{0\}$, тогаш постојат α_i, $i = 1,...,n-1$ такви што $x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$. Од линеарната независност на $x_1,...,x_{n-1}$ следува дека постои $y_0 \in L$ таков што $\|y_0, x_1,...,x_{n-1}\| \neq 0,$ па затоа

$$
\begin{aligned}
\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y_0) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x+ty_0,x_1,...,x_{n-1}\|-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{\| x+ty_0-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i, x_1,...,x_{n-1}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{t\|y_0,x_1,...,x_{n-1}\|}{t} = \|y_0,x_1,...,x_{n-1}\| \\
&\neq -\|y_0,x_1,...,x_{n-1}\| = \lim_{t\to 0^-} \frac{-t\|y_0,x_1,...,x_{n-1}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \frac{\| x+ty_0-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i x_i, x_1,...,x_{n-1}\|}{t} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \frac{\|x+ty_0,x_1,...,x_{n-1}\|-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{t} \\
&= \varphi'_{1^-}(x,x_1,...,x_{n-1})(y_0),
\end{aligned}
$$

т.е. n-нормата не е Gateaux диференцијабилна по $x=0$ во точката $(x,x_1,...,x_{n-1})$ по правецот y_0.

Лема 4. n-нормираниот векторски простор $(L,\|*,....,*\|)$ е гладок ако и само ако за секој $x\neq 0$ и за секои линеарно независни вектори $x_1,...,x_{n-1}\in L$ такви што $P(x)\cap P(x_1,...,x_{n-1})=\{0\}$ важи

$$\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y+y') = \varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)+\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y'),$$

за секои $y,y'\in L$.

Доказ. Непосредно следува од лема 3, последица 3 и теорема 2.

♦

Лема 5. n-нормираниот векторски простор $(L,\|*,....,*\|)$ е гладок ако и само ако за секој $x\neq 0$ и за секои линеарно независни вектори $x_1,...,x_{n-1}\in L$ такви што $P(x)\cap P(x_1,...,x_{n-1})=\{0\}$ важи

$$-\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y) = \varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y), \text{ за секои } y\in L.$$

Доказ. Непосредно следува од лема 3, последица 3 и теорема 2.

♦

2. Генерализиран *n*-скаларен производ

Нека $(L,\|*,....,*\|)$ е n-нормиран простор. Од непрекинатоста на n-нормата во однос на секоја координата добиваме

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|^2-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2}{2t}=$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{t}\cdot\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{2}$$

$$=\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y).$$

Со

$$\langle x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle=\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y) \qquad (1)$$

дефинираме *генерализиран n-скаларен производ* придружен на n-нормата $\|*,....,*\|$. Да забележиме дека $\langle x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle=0$ ако и само ако $x,x_1,...,x_{n-1}$ се линеарно зависни или $\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=0$.

Теорема 3. За секои $y_1,y'_1,x_1,x_2,...,x_n\in L$ и за секои позитивни реални броеви α,β важи

i) $\|x_1,x_2,...,x_n\|^2=\langle x_1,x_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle$,

ii) $|\langle x_1,y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle|\le\|x_1,x_2,...,x_n\|\cdot\|y_1,x_2,...,x_n\|$,

iii) $\langle x_1,y_1+y'_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle\le\langle x_1,y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle+\langle x_1,y'_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle$, , и

iv) $\langle\alpha x_1,\beta y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle=\alpha\beta\langle x_1,y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle$.

Доказ. *i)* Од дефиницијата на генерализираниот n-скаларен производ и од теорема 1 *iv)* имаме

$$\langle x_1,x_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle=\|x_1,x_2,...,x_n\|\varphi'_{1^+}(x_1,x_2,...,x_n)(x_1)=\|x_1,x_2,...,x_n\|^2.$$

ii) Од последица 2 и лема 3 добиваме

$$|\langle x_1,y_1\,|\,x_2,...,x_n\rangle|=\|x_1,x_2,...,x_n\|\cdot|\varphi'_{1^+}(x_1,x_2,...,x_n)(y_1)|\le\|x_1,x_2,...,x_n\|\cdot\|y_1,x_2,...,x_n\|.$$

iii) Од теорема 1 *i*) имаме

$$\left\langle x_1, y_1 + y_1' \mid x_2,\dots,x_n \right\rangle = \|x_1, x_2,\dots,x_n\| \cdot \varphi_{1^+}'(x_1, x_2,\dots,x_n)(y_1 + y_1')$$
$$\le \|x_1, x_2,\dots,x_n\| \cdot \left(\varphi_{1^+}'(x_1, x_2,\dots,x_n)(y_1) + \varphi_{1^+}'(x_1, x_2,\dots,x_n)(y_1') \right)$$
$$= \|x_1, x_2,\dots,x_n\| \cdot \varphi_{1^+}'(x_1, x_2,\dots,x_n)(y_1) + \|x_1, x_2,\dots,x_n\| \cdot \varphi_{1^+}'(x_1, x_2,\dots,x_n)(y_1')$$
$$= \left\langle x_1, y_1 \mid x_2,\dots,x_n \right\rangle + \left\langle x_1, y_1' \mid x_2,\dots,x_n \right\rangle.$$

iv) Според теорема 1 *ii)* и *iii)* за секои позитивни реални броеви α, β добиваме

$$\left\langle \alpha x_1, \beta y_1 \mid x_2,\dots,x_n \right\rangle = \|\alpha x_1, x_2,\dots,x_n\| \varphi_{1^+}'(\alpha x_1, x_2,\dots,x_n)(\beta y_1)$$
$$= \alpha\beta \|x_1, x_2,\dots,x_n\| \varphi_{1^+}'(x_1, x_2,\dots,x_n)(y_1) = \alpha\beta \left\langle x_1, y_1 \mid x_2,\dots,x_n \right\rangle. \ \blacklozenge$$

Лема 6. Ако n-нормираниот векторски простор $(L, \|*,\dots,*\|)$ е n-предхилбертов простор, тогаш n-скаларниот производ и генерализираниот n-скаларен производ се совпаѓаат, т.е.

$$\left\langle x_1, y_1 \mid x_2,\dots,x_n \right\rangle = \left(x_1, y_1 \mid x_2,\dots,x_n \right).$$

Доказ. Имаме:

$$\left\langle x_1, y_1 \mid x_2,\dots,x_n \right\rangle = \lim_{t\to 0^+} \frac{\|x_1 + ty_1, x_2,\dots,x_n\|^2 - \|x_1, x_2,\dots,x_n\|^2}{2t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\left(x_1 + ty_1, x_1 + ty_1 \mid x_2,\dots,x_n\right) - \left(x_1, x_1 \mid x_2,\dots,x_n\right)}{2t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{2t\left(x_1, y_1 \mid x_2,\dots,x_n\right) - t^2\left(y_1, y_1 \mid x_2,\dots,x_n\right)}{2t}$$
$$= \left(x_1, y_1 \mid x_2,\dots,x_n\right). \ \blacklozenge$$

Теорема 4. Нека $(L, \|*,\dots,*\|)$ е гладок n-нормиран векторски простор. Ако x и y се линеарно независни вектори во L и $x_1,\dots,x_{n-1} \in L$ линеарно независни вектори такви што $P(x) \cap P(x_1,\dots,x_{n-1}) = \{0\}$, тогаш постои единствен реален број α таков што $\left\langle x, \alpha x + y \mid x_1,\dots,x_{n-1} \right\rangle = 0$.

Доказ. Нека

$$\alpha = -\frac{\varphi_1'(x, x_1,\dots,x_n)(y)}{\|x, x_1,\dots,x_n\|}.$$

Имаме:

$$\left\langle x,\alpha x+y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right\rangle = \| x,x_1,...,x_{n-1}\| \cdot \varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(\alpha x+y)$$
$$= \| x,x_1,...,x_{n-1}\| \cdot (\varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(\alpha x)+\varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(y))$$
$$= \| x,x_1,...,x_{n-1}\| \cdot (\alpha \| x,x_1,...,x_{n-1}\| +\varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(y)) = 0.$$

Ако $\alpha,\beta \in R$ се такви што

$$\left\langle x,\alpha x+y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right\rangle = 0 \text{ и } \left\langle x,\beta x+y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right\rangle = 0,$$

тогаш бидејќи

$$\| x,x_1,...,x_{n-1}\| \neq 0$$

добиваме

$$\varphi_{1^+}'(x,x_1,...,x_{n-1})(\alpha x+y) = \varphi_{1^+}'(x,x_1,...,x_{n-1})(\beta x+y)$$

од што следува $\alpha=\beta$. ♦

Теорема 5. За гладок n-нормиран векторски простор $(L,\|*,....,*\|)$ следните тврдења се еквивалентни:

i) $(L,\|*,....,*\|)$ е n-предхилбертов простор.

ii) Ако $\| x,x_1,...,x_{n-1}\| = \| y,x_1,...,x_{n-1}\|$, тогаш
$$\lim_{n\to\infty}\left(\| nx+y,x_1,...,x_{n-1}\| - \| x+ny,x_1,...,x_{n-1}\|\right) = 0.$$

iii) за секои $x,y,x_1,...,x_{n-1} \in L$ важи
$$\left\langle x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right\rangle = \left\langle y,x\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right\rangle,$$
т.е. генерализираниот n-скаларен производ е симетричен во однос на x и y.

iv) $\left\langle x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\right\rangle$ е линеарен по x за секои $y,x_1,...,x_{n-1} \in L$.

Доказ. $i)\Rightarrow ii)$. Нека претпоставиме дека $(L,\|*,....,*\|)$ е n-предхилбертов простор со n-скаларен производ $(*,*|*,....,*)$ и $\| x,x_1,...,x_{n-1}\| = \| y,x_1,...,x_{n-1}\|$. Тогаш, за секој $n\in N$ важи

$$\| x+ny,x_1,...,x_{n-1}\|^2 = (x+ny,x+ny\,|\,x_1,...,x_{n-1})$$
$$= (x,x\,|\,x_1,...,x_{n-1}) + 2n(x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}) + n^2(y,y\,|\,x_1,...,x_{n-1})$$
$$= (y,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}) + 2n(x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}) + n^2(x,x\,|\,x_1,...,x_{n-1})$$
$$= (nx+y,nx+y\,|\,x_1,...,x_{n-1}) = \| nx+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2,$$

па затоа

$$\lim_{n\to\infty}\left(\| nx+y,x_1,...,x_{n-1}\| - \| x+ny,x_1,...,x_{n-1}\|\right) = 0.$$

$ii) \Rightarrow iii)$. Нека $\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| = \|y, x_1, ..., x_{n-1}\|$. Тогаш,

$$\begin{aligned}\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle &= \|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi_{1^+}'(x, x_1, ..., x_{n-1})(y)\\ &= \|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \lim_{n\to\infty}(\|nx + y, x_1, ..., x_{n-1}\| - \|nx, x_1, ..., x_{n-1}\|)\\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \lim_{n\to\infty}(\|x + ny, x_1, ..., x_{n-1}\| - \|ny, x_1, ..., x_{n-1}\|)\\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi_{1^+}'(y, x_1, ..., x_{n-1})(x) = \langle y, x \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle.\end{aligned}$$

Ако $\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \neq \|y, x_1, ..., x_{n-1}\|$, тогаш

$$\big\| \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| x, x_1, ..., x_{n-1}\big\| = \big\| \|x, x_1, ..., x_{n-1}\| y, x_1, ..., x_{n-1}\big\|,$$

па затоа

$$\begin{aligned}\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle &= \|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi_{1^+}'(x, x_1, ..., x_{n-1})(y)\\ &= \varphi_{1^+}'(\|y, x_1, ..., x_{n-1}\| x, x_1, ..., x_{n-1})(\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| y)\\ &= \varphi_{1^+}'(\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| y, x_1, ..., x_{n-1})(\|y, x_1, ..., x_{n-1}\| x)\\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi_{1^+}'(y, x_1, ..., x_{n-1})(x) = \langle y, x \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle.\end{aligned}$$

$iii) \Rightarrow iv)$. Бидејќи L е гладок и $\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle$ е симетричен во однос на x и y од теорема 2 добиваме

$$\begin{aligned}\langle x + x', y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle &= \langle y, x + x' \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle\\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi_1'(y, x_1, ..., x_{n-1})(x + x')\\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot (\varphi_1'(y, x_1, ..., x_{n-1})(x) + \varphi_1'(y, x_1, ..., x_{n-1})(x'))\\ &= \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi_1'(y, x_1, ..., x_{n-1})(x) + \|y, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi_1'(y, x_1, ..., x_{n-1})(x')\\ &= \langle y, x \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle + \langle y, x' \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle\\ &= \langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle + \langle x', y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle.\end{aligned}$$

$iv) \Rightarrow i)$. Од линеарноста на $\langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle$ по x следува

$$\begin{aligned}\langle x + y, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle &= \langle x, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle + \langle y, y \mid x_1, ..., x_{n-1}\rangle =\\ &= \|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \cdot \varphi_1'(x, x_1, ..., x_{n-1})(y) + \|y, x_1, ..., x_{n-1}\|^2\end{aligned} \qquad (2)$$

Од друга страна, ако $x, y, x_1, ..., x_{n-1} \in L$ се такви што

$$x+y\neq 0 \text{ и } P(x+y)\cap P(x_1,...,x_{n-1})=\{0\},$$

тогаш

$$\begin{aligned}
\langle x+y,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle &= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(y)\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(x+y+(-x))\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\left(\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(x+y)+\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(-x)\right)\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x+y,x_1,...,x_{n-1})(-x)\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\langle x+y,-x\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\langle x,-x\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle+\langle y,-x\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x,x_1,...,x_{n-1})(-x)+\\
&\quad+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x)\\
&= \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x).
\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}\langle x+y,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle = \|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2\\
+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x).\end{aligned}\tag{3}$$

Од (2) и (3) следува

$$\begin{aligned}\|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2 &= \|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\\
&\quad+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)-\\
&\quad-\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x).\end{aligned}\tag{4}$$

Ако во (4) наместо y ставиме $-y$ и ако $x,y,x_1,...,x_{n-1}\in L$ се такви што $x-y\neq 0$ и $P(x-y)\cap P(x_1,...,x_{n-1})=\{0\}$, добиваме

$$\begin{aligned}\|x-y,x_1,...,x_{n-1}\|^2 &= \|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\\
&\quad+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(x,x_1,...,x_{n-1})(-y)-\\
&\quad-\|y,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1^{'}(y,x_1,...,x_{n-1})(-x).\end{aligned}\tag{5}$$

Бидејќи L е гладок важи

$$\varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(-y)+\varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=0.$$

Ако ги собереме (4) и (5) добиваме

$$\|x+y,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|x-y,x_1,...,x_{n-1}\|^2=2\left(\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2+\|y,x_1,...,x_{n-1}\|^2\right).$$

Сега тврдењето непосредно следува од теорема 7, [1]. ♦

Последица 4. Нека $(L,\|*,....,*\|)$ е гладок n-нормиран векторски простор. Следниве тврдења се еквивалентни:

i) $(L,\|*,....,*\|)$ е n-предхилбертов простор.

ii) $\varphi_1'(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=\varphi_1'(y,x_1,...,x_{n-1})(x)$, за секои $x,y,x_1,...,x_{n-1}\in L$. ♦

Литература

[1] Малчески, Р.: *Забелешки за n-нормирани простори,* Мат. бил. 20 (1996)

[2] Малчески, Р.: *Gateaux изводи за n-норма,* Мат. бил. 27 (2003)

[3] Misiak, A.: *n-Inner Product Spaces,* Math.Nachr. 140 (1989)

[4] Rudin, W: *Functional Analysis,* 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, (1991)

e-mail: rmalcheski@yahoo.com