8 МСДР 2004, (121 - 130)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

НОВА ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА НА *n*-СКАЛАРЕН ПРОИЗВОД

Соња Чаламани, Технички факултет, Битола

Апстракт. Во оваа работа, користејќи ги Gateaux изводи ќе дадеме нова генерализација на поимот за $n-$ скаларен производ, која е различна од генерализацијата дадена во [3] и ќе докажеме неколку својства во врска со истата.

Поимите $n-$норма и $n-$скаларен производ се воведени од A. Misiak ([3]), како што следува.

Нека L е реален векторски простор со димензија поголема или еднаква на n, $n>1$ и $\|*,....,*\|$ е реална функција на L^n за која важат условите

i) $\| x_1, x_2, ..., x_n \| \geq 0$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ и $\| x_1, x_2, ..., x_n \| = 0$ ако и само ако множеството $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ е линеарно зависно;

ii) $\| x_1, ..., x_n \| = \| \pi(x_1), ..., \pi(x_n) \|$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ и за секоја биекција $\pi : \{x_1, x_2, ..., x_n\} \to \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

iii) $\| \alpha x_1, x_2, ..., x_n \| = |\alpha| \cdot \| x_1, x_2, ..., x_n \|$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in L$ и за секој $\alpha \in \mathbf{R}$.

iv) $\| x_1 + x_1^{'}, x_2, ..., x_n \| \leq \| x_1, x_2, ..., x_n \| + \| x_1^{'}, x_2, ..., x_n \|$, за секои $x_1, ..., x_n, x_1^{'} \in L$.

Функцијата $\|*,....,*\|$ се нарекува $n-$норма на L, а $(L, \|*,....,*\|)$ се нарекува реален $n-$нормиран простор.

Нека n е природен број, L е реален векторски простор таков што $\dim L \geq n$ и $\|*,*|*,....,*\|$ е реална функција на L^{n+1} таква што

i) $(a, a \mid x_1, ..., x_{n-1}) \geq 0$, за секои $a, x_1, ..., x_{n-1} \in L$ и $(a, a \mid x_1, ..., x_{n-1}) = 0$ ако и само ако $a, x_1, ..., x_{n-1}$ се линеарно зависни;

ii) $\left(a,b \mid x_1,...,x_{n-1}\right)=\left(\varphi(a),\varphi(b) \mid \pi(x_1),...,\pi(x_{n-1})\right)$, за секои $a,b,x_1,...,x_{n-1}\in L$ и за секои биекции

$$\pi:\left\{x_1,...,x_{n-1}\right\}\to\left\{x_1,...,x_{n-1}\right\},\quad \varphi:\{a,b\}\to\{a,b\};$$

iii) за секои $a,x_1,x_2,...,x_{n-1}\in L$ важи

$$\left(a,a \mid x_1,x_2...,x_{n-1}\right)=\left(x_1,x_1 \mid a,x_2...,x_{n-1}\right);$$

iv) за секои $a,b,x_1,...,x_{n-1}\in L$ и за секој $\alpha\in\mathbf{R}$ важи

$$\left(\alpha a,b \mid x_1,...,x_{n-1}\right)=\alpha\left(a,b \mid x_1,...,x_{n-1}\right);\text{ и}$$

v) за секои $a,b,a_1,x_1,...,x_{n-1}\in L$ важи

$$\left(a+a_1,b \mid x_1,...,x_{n-1}\right)=\left(a,b \mid x_1,...,x_{n-1}\right)+\left(a_1,b \mid x_1,...,x_{n-1}\right),.$$

Функцијата $\boldsymbol{\|*,*|*,....,*\|}$ се нарекува *n*-скаларен производ, а $\boldsymbol{(L,\|*,*|*,....,*\|)}$ се нарекува *n*-предхилбертов простор.

Да забележиме дека ако $n-$нормираниот простор е $n-$предхилбертов, тогаш

$$(a,a \mid x_1,...,x_{n-1})=\| a,x_1,...,x_{n-1}\|,\text{ за секои } a,x_1,...,x_{n-1}\in L.$$

Нека $\boldsymbol{(L,\|*,....,*\|)}$ е реален *n*-нормиран простор и $\phi: L\text{ x ... x } L\to\mathbf{R}$ е произволен *n*-функционал.

Десен парцијален извод на *n*-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y е

$$\phi_{1^+}^{'}(x_1,...,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,...,x_n)-\phi(x_1,x_2,...,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Лев парцијален извод на *n*-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y е

$$\phi_{1^-}^{'}(x_1,...,x_n)(y)=\lim_{\lambda\to 0^-}\frac{\phi(x_1+\lambda y,x_2,...,x_n)-\phi(x_1,x_2,...,x_n)}{\lambda},$$

ако наведената граница постои.

Ако левиот и десниот парцијален извод на *n*-функционалот ϕ по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y постојат и се еднакви, тогаш ќе велиме дека *n*-функционалот ϕ е диференцијабилен по x_1 во точката $(x_1,...,x_n)$ во правец на y, т.е. постои $\phi_1^{'}(x_1,...,x_n)(y)$, при што

$$\phi_1'(x_1,...,x_n)(y)=\phi_{1^+}'(x_1,...,x_n)(y)=\phi_{1^-}'(x_1,...,x_n)(y).$$

Аналогно се дефинираат парцијалните изводи

$$\phi_i'(x_1,...,x_n)(y),\quad \phi_{i^+}'(x_1,...,x_n)(y)\ \text{ и }\ \phi_{i^-}'(x_1,...,x_n)(y),\quad i=2,3,...,n.$$

Во [2] е разгледан n-функционалот $\varphi: L\ \text{x} \ldots \text{x}\ L \to R$, дефиниран со

$$\varphi(x_1,...,x_n)=\|x_1,...,x_n\|,$$

и неговата диференцијабилност. Притоа, за функцијата

$$\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)=\frac{\|x_1+ty,x_2,...,x_n\|-\|x_1,x_2,...,x_n\|}{t},\quad x_1,x_2,...,x_n,y\in L \text{ и } t\in\mathbf{R}$$

докажани се следниве тврдења.

Лема 1. Функцијата $t\to\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)$ е монотоно растечка за $t>0$. ♦

Последица 1. Функцијата $t\to\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)$ е монотоно растечка за $t<0$. ♦

Лема 2. На интервалот $(0,\infty)$ функцијата $t\to\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)$ е ограничена и важи

$$-\|-y,x_2,...,x_n\|\le\delta_1(x_1,...,x_n,y,t)\le\|y,x_2,...,x_n\|.\ ♦$$

Забелешка. Аналогно, може да се докаже дека на интервалите $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$ функциите

$$t\to\delta_i(x_1,...,x_n,y,t)=\frac{\|x_1,...,x_{i-1},x_i+ty,x_{i+1},...,x_n\|-\|x_1,...,x_n\|}{t},\quad i=2,3,...,n$$

се монотоно растечки и дека на интервалот $(0,\infty)$ се ограничени, при што важат оценките

$$-\|-y,x_2,...,x_n\|\le\delta_i(x_1,...,x_n,y,t)\le\|y,x_2,...,x_n\|,\quad i=2,3,...,n.$$

Последица 2. Нека $(L,\|*,....,*\|)$ е реален n-нормиран простор. Тогаш постои

$$\varphi_{1^+}'(x_1,...,x_n)(y)=\lim_{t\to0^+}\frac{\|x_1+ty,x_2...,x_n\|-\|x_1,...,x_n\|}{t},$$

и важи

$$-\|-y,x_2,...,x_n\|\le\varphi_{1^+}'(x_1,...,x_n)(y)\le\|y,x_2,...,x_n\|.\ ♦$$

Теорема 1. За секои $x_1, x_2, ..., x_n, y, y' \in L$ важат следниве својства:

i) $\varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(y + y') \le \varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(y) + \varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(y')$;

ii) За секој $\alpha > 0$ важи $\varphi'_{1^+}(\alpha x_1, ..., x_n)(y) = \varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(y)$;

iii) Засекој $\alpha \ge 0$ важи $\varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(y)$;

iv) Засекој $\alpha \ge 0$ важи $\varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(\alpha x_1) = \alpha\|x_1, ..., x_n\|$; и

v) $\|x_1 + ty, x_2, ..., x_n\| \ge \|x_1, x_2, ..., x_n\|$, за секој $t \in \mathbf{R}$ ако и само ако

$$-\varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(-y) \le 0 \le \varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(y). \ \blacklozenge$$

Лема 3. За секои $x_1, ..., x_n, y \in L$ важи

$$-\varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(-y) = \varphi'_{1^-}(x_1, ..., x_n)(y). \ \blacklozenge$$

Последица 3. За секои $x_1, ..., x_n, y, y' \in L$ важат следните својства

i) $-\|y, x_2, ..., x_n\| \le \varphi'_{1^-}(x_1, ..., x_n)(y) \le \|y, x_2, ..., x_n\|$;

ii) $\varphi'_{1^-}(x_1, ..., x_n)(y) + \varphi'_{1^-}(x_1, ..., x_n)(y') \le \varphi'_{1^-}(x_1, ..., x_n)(y + y')$;

iii) За $\alpha < 0$, $\varphi'_{1^+}(\alpha x_1, x_2, ..., x_n)(y) = -\varphi'_{1^-}(x_1, ..., x_n)(y)$;

iv) За $\alpha \le 0$, $\varphi'_{1^+}(x_1, x_2, ..., x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_{1^-}(x_1, ..., x_n)(y)$;

v) $\varphi'_{1^-}(x_1, ..., x_n)(y) \le \varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(y)$. ♦

Теорема 2. Ако *Gateaux* извод на *n*-нормата по x_1 во точката $(x_1, ..., x_n)$ по правец *y* постои, тогаш точни се следните тврдења

i) $\varphi'_1(x_1, ..., x_n)(y + y') = \varphi'_1(x_1, ..., x_n)(y) + \varphi'_1(x_1, ..., x_n)(y')$;

ii) $\varphi'_1(x_1, ..., x_n)(\alpha y) = \alpha\varphi'_1(x_1, ..., x_n)(y)$, за секој реален број α;

iii) $\varphi'_1(\alpha x_1, x_2, ..., x_n)(y) = \operatorname{sgn}(\alpha)\varphi'_1(x_1, ..., x_n)(y)$, за секој реален број $\alpha \ne 0$;

iv) $|\varphi'_1(x_1, ..., x_n)(y)| \le \|y, x_2, ..., x_n\|$; и

v) $\varphi'_1(x_1, ..., x_n)(\alpha x_1) = \alpha\|x_1, ..., x_n\|$. ♦

Во [3] е дадена следнава дефиниција за гладок (мазен) *n*-нормиран простор: *n*-нормираниот векторски простор $(L, \|*, ..., *\|)$ го нарекуваме *мазен* (*гладок*) ако за секој $x \neq 0$ и за секои линеарно независни вектори $x_1,...,x_{n-1} \in L$ такви што $P(x) \cap P(x_1,...,x_{n-1}) = \{0\}$ n-нормата е Gateaux диференцијабилна по x во точката $(x, x_1,...,x_{n-1})$ по секој правец y. Исто така се докажани следниве тврдења:

Лема 4. n-нормираниот векторски простор $(L, \|*,....,*\|)$ е гладок ако и само ако за секој $x \neq 0$ и за секои линеарно независни вектори $x_1,...,x_{n-1} \in L$ такви што $P(x) \cap P(x_1,...,x_{n-1}) = \{0\}$ важи

$$\varphi'_{1^+}(x, x_1,...,x_{n-1})(y + y') = \varphi'_{1^+}(x, x_1,...,x_{n-1})(y) + \varphi'_{1^+}(x, x_1,...,x_{n-1})(y'),$$

за секои $y, y' \in L$. ♦

Лема 5. n-нормираниот векторски простор $(L, \|*,....,*\|)$ е гладок ако и само ако за секој $x \neq 0$ и за секои линеарно независни вектори $x_1,...,x_{n-1} \in L$ такви што $P(x) \cap P(x_1,...,x_{n-1}) = \{0\}$ важи

$$-\varphi'_{1^+}(x, x_1,...,x_{n-1})(y) = \varphi'_{1^+}(x, x_1,...,x_{n-1})(y), \text{ за секои } y \in L. \ ♦$$

1. Нова генерализација на *n*-скаларниот производ

Нека $(L, \|*,....,*\|)$ е n-нормиран простор. Од непрекинатоста на n-нормата во однос на секоја координата добиваме

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{\|x + ty, x_1,...,x_{n-1}\|^2 - \|x, x_1,...,x_{n-1}\|^2}{2t} = \|x, x_1,...,x_{n-1}\| \cdot \varphi'_{1^+}(x, x_1,...,x_{n-1})(y).$$

Во [3] со

$$\langle x, y \mid x_1,...,x_{n-1} \rangle = \|x, x_1,...,x_{n-1}\| \cdot \varphi'_{1^+}(x, x_1,...,x_{n-1})(y) \qquad (*)$$

е дефиниран генерализиран n-скаларен производ придружен на n-нормата $\|*,....,*\|$ и се докажани повеќе својства во врска со истиот. Од претходната дефиниција следува дека $\langle x, y \mid x_1,...,x_{n-1} \rangle = 0$ ако и само ако $x, x_1,...,x_{n-1}$ се линеарно зависни или $\varphi'_{1^+}(x, x_1,...,x_{n-1})(y) = 0.$ Во натамошните разгледувања, користејќи ги Gateaux изводи ќе дадеме нова дефиниција за генерализиран n-скаларен производ.

Од непрекинатоста на n-нормата во однос на секоја координата добиваме:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|^2-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2}{4t}+\lim_{t\to 0^-}\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|^2-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|^2}{4t}=$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{t}\cdot\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{4}+$$

$$+\lim_{t\to 0^-}\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|-\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{t}\cdot\frac{\|x+ty,x_1,...,x_{n-1}\|+\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{4}$$

$$=\frac{\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{2}\cdot[\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)+\varphi'_{1^-}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)].$$

Со

$$\langle x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle=\frac{\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{2}\cdot[\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)+\varphi'_{1^-}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)]\quad(1)$$

дефинираме *генерализиран n-скаларен производ* придружен на n-нормата $\|*,....,*\|$. Притоа, $\langle x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle=0$ ако и само ако $x,x_1,...,x_{n-1}$ се линеарно зависни или

$$\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)+\varphi'_{1^-}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=0,$$

т.е. $\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=-\varphi'_{1^-}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)$.

Лема 6. Ако n-нормираниот векторски простор $(L,\|*,....,*\|)$ е гладок, тогаш генерализираните n-скаларни производи (*) и (1) се совпаѓаат.

Доказ. Нека $(L,\|*,....,*\|)$ е гладок n-нормиран векторски простор. Тогаш

$$\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=\varphi'_{1^-}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)=\varphi'_1(x,x_1,...,x_{n-1})(y)$$

па затоа

$$\begin{aligned}\frac{\|x,x_1,...,x_{n-1}\|}{2}\cdot[\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)+\varphi'_{1^-}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)]&=\\ =\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi'_1(x,x_1,...,x_{n-1})(y)&\\ =\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi'_{1^+}(x,x_1,...,x_{n-1})(y)&\end{aligned}$$

т.е. генерализираните n-скаларни производи (*) и (1) се совпаѓаат и притоа генерализираниот n-скаларен производ (1) е даден со

$$\langle x,y\,|\,x_1,...,x_{n-1}\rangle=\|x,x_1,...,x_{n-1}\|\cdot\varphi'_1(x,x_1,...,x_{n-1})(y).\quad(2)$$

Теорема 3. За секои $y_1, y_1', x_1, x_2, ..., x_n \in L$ и за секои позитивни реални броеви α, β важи

i) $\|x_1, x_2, ..., x_n\|^2 = \langle x_1, x_1 \mid x_2, ..., x_n \rangle$,

ii) $|\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \rangle| \leq \|x_1, x_2, ..., x_n\| \cdot \|y_1, x_2, ..., x_n\|$,

Доказ. *i)* Од теорема 1 и последица 3 следува

$$\varphi'_{1^+}(x_1, ..., x_n)(x_1) = \varphi'_{1^-}(x_1, ..., x_n)(x_1) = \|x_1, ..., x_n\|,$$

па од дефиницијата на генерализираниот n-скаларен производ (1) добиваме

$$\begin{aligned}\langle x_1, x_1 \mid x_2, ..., x_n \rangle &= \tfrac{\|x_1, x_2, ..., x_n\|}{2}[\varphi'_{1^+}(x_1, x_2, ..., x_n)(x_1) + \varphi'_{1^-}(x_1, x_2, ..., x_n)(x_1)] \\ &= \tfrac{\|x_1, x_2, ..., x_n\|}{2}[\|x_1, x_2, ..., x_n\| + \|x_1, x_2, ..., x_n\|] = \|x_1, x_2, ..., x_n\|^2.\end{aligned}$$

ii) Од последица 2, последица 3 и дефиницијата на генерализираниот n-скаларен производ (1) добиваме

$$\begin{aligned}|\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \rangle| &= \tfrac{\|x_1, x_2, ..., x_n\|}{2} \cdot |\varphi'_{1^+}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1) + \varphi'_{1^-}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1)| \\ &\leq \tfrac{\|x_1, x_2, ..., x_n\|}{2} \cdot (|\varphi'_{1^+}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1)| + |\varphi'_{1^-}(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1)|) \\ &\leq \tfrac{\|x_1, x_2, ..., x_n\|}{2} \cdot (\|y_1, x_2, ..., x_n\| + \|y_1, x_2, ..., x_n\|) \\ &= \|x_1, x_2, ..., x_n\| \cdot \|y_1, x_2, ..., x_n\|,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. ♦

Теорема 4. Ако n-нормираниот векторски простор $(L, \|*, ..., *\|)$ е гладок, тогаш за генерализираниот n-скаларен производ (1) важи

i) $\langle x_1, y_1 + y_1' \mid x_2, ..., x_n \rangle = \langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \rangle + \langle x_1, y_1' \mid x_2, ..., x_n \rangle$, и

ii) $\langle \alpha x_1, \beta y_1 \mid x_2, ..., x_n \rangle = \alpha\beta \langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \rangle$.

Доказ. *i*) Од лема 6 и теорема 2 следува

$$\left\langle x_1, y_1 + y_1' \mid x_2, ..., x_n \right\rangle = \| x_1, ..., x_n \| \cdot \varphi_1'(x_1, ..., x_n)(y + y')$$
$$= \| x_1, ..., x_n \| \cdot [\varphi_1'(x_1, ..., x_n)(y) + \varphi_1'(x_1, ..., x_n)(y')]$$
$$= \| x_1, ..., x_n \| \cdot \varphi_1'(x_1, ..., x_n)(y) + \| x_1, ..., x_n \| \cdot \varphi_1'(x_1, ..., x_n)(y)$$
$$= \left\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle + \left\langle x_1, y_1' \mid x_2, ..., x_n \right\rangle.$$

ii) Од лема 6 и теорема 2 следува

$$\left\langle \alpha x_1, \beta y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle = \| \alpha x_1, ..., x_n \| \cdot \varphi_1'(\alpha x_1, ..., x_n)(\beta y)$$
$$= \beta \mid \alpha \mid \cdot \| x_1, ..., x_n \| \cdot \varphi_1'(\alpha x_1, ..., x_n)(y)$$
$$= \beta \mid \alpha \mid \operatorname{sgn} \alpha \cdot \| x_1, ..., x_n \| \cdot \varphi_1'(x_1, ..., x_n)(y)$$
$$= \alpha\beta \left\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle,$$

што и требаше да се докаже. ♦

Лема 7. Ако n-нормираниот векторски простор $(L, \|*, ..., *\|)$ е n-предхилбертов простор, тогаш n-скаларниот производ и генерализираниот n-скаларен производ (1) се совпаѓаат, т.е.

$$\left\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle = \left(x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right).$$

Доказ. За секои $y_1, x_1, x_2, ..., x_n \in L$ имаме:

$$\left\langle x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n \right\rangle = \lim_{t \to 0^+} \frac{\|x_1 + ty_1, x_2, ..., x_n\|^2 - \|x_1, x_2, ..., x_n\|^2}{4t} +$$
$$+ \lim_{t \to 0^-} \frac{\|x_1 + ty_1, x_2, ..., x_n\|^2 - \|x_1, x_2, ..., x_n\|^2}{4t} =$$
$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{\left(x_1 + ty_1, x_1 + ty_1 \mid x_2, ..., x_n\right) - \left(x_1, x_1 \mid x_2, ..., x_n\right)}{4t} +$$
$$+ \lim_{t \to 0^-} \frac{\left(x_1 + ty_1, x_1 + ty_1 \mid x_2, ..., x_n\right) - \left(x_1, x_1 \mid x_2, ..., x_n\right)}{4t} =$$
$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{2t\left(x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n\right) + t^2\left(y_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n\right)}{4t} +$$
$$+ \lim_{t \to 0^-} \frac{2t\left(x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n\right) + t^2\left(y_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n\right)}{4t}$$
$$= \left(x_1, y_1 \mid x_2, ..., x_n\right),$$

што и требаше да се докаже. ♦

Теорема 5. Нека $(L,\|*,\dots,*\|)$ е гладок n-нормиран векторски простор. Ако x и y се линеарно независни вектори во L и $x_1,\dots,x_{n-1}\in L$ линеарно независни вектори такви што

$$P(x)\cap P(x_1,\dots,x_{n-1})=\{0\},$$

тогаш постои единствен реален број α таков што

$$\langle x,\alpha x+y\,|\,x_1,\dots,x_{n-1}\rangle=0.$$

Доказ. Од

$$P(x)\cap P(x_1,\dots,x_{n-1})=\{0\},$$

следува дека $x\notin P(x_1,\dots,x_{n-1})$, т.е. множеството вектори $\{x,x_1,\dots,x_{n-1}\}$ е линеарно независно, па затоа $\|x,x_1,\dots,x_{n-1}\|\neq 0$. Земаме

$$\alpha=-\frac{\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_n)(y)}{\|x,x_1,\dots,x_n\|},$$

и добиваме:

$$\begin{aligned}\langle x,\alpha x+y\,|\,x_1,\dots,x_{n-1}\rangle&=\|x,x_1,\dots,x_{n-1}\|\cdot\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(\alpha x+y)\\&=\|x,x_1,\dots,x_{n-1}\|\cdot[\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(\alpha x)+\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(y)]\\&=\|x,x_1,\dots,x_{n-1}\|\cdot[\alpha\|x,x_1,\dots,x_{n-1}\|+\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(y)]\\&=\|x,x_1,\dots,x_{n-1}\|\cdot[-\frac{\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_n)(y)}{\|x,x_1,\dots,x_n\|}\cdot\|x,x_1,\dots,x_n\|+\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(y)]=0.\end{aligned}$$

Понатаму, нека $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ се такви што

$$\langle x,\alpha x+y\,|\,x_1,\dots,x_{n-1}\rangle=0 \text{ и } \langle x,\beta x+y\,|\,x_1,\dots,x_{n-1}\rangle=0.$$

Од $P(x)\cap P(x_1,\dots,x_{n-1})=\{0\}$ добиваме дека $x\notin P(x_1,\dots,x_{n-1})$, т.е. множеството $\{x,x_1,\dots,x_{n-1}\}$ е линеарно независно, што значи

$$\|x,x_1,\dots,x_{n-1}\|\neq 0\ ,$$

па затоа

$$\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(\alpha x+y)=\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(\beta x+y).$$

Конечно, од последното равенство и од теорема 2 следува

$$\begin{aligned}0&=\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(\alpha x+y)-\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(\beta x+y)\\&=(\alpha-\beta)\varphi_1'(x,x_1,\dots,x_{n-1})(x)=(\alpha-\beta)\cdot\|x,x_1,\dots,x_{n-1}\|\end{aligned}$$

и како $\|x, x_1, ..., x_{n-1}\| \neq 0$ добиваме $\alpha = \beta$. ♦

На крајот од оваа статија да забележиме дека бидејќи во гладок n-нормиран векторски простор $(L, \|*,....,*\|)$ генерализираните n-скаларни производи (*) и (1) се совпаѓаат, точни се теоремата 5 и последицата 4 од [3].

Литература

[1] **Малчески, Р.:** *Забелешки за n-нормирани ӣросӣори,* Мат. бил. 20 (1996)

[2] **Малчески, Р.:** *Gateaux изводи за n-норма,* Мат. бил. 27 (2003)

[3] **Малчески, Р.:** *Генерализиран n-скаларен ӣроизвод,* (предпечат)

[4] **Misiak, A.:** *n-Inner Product Spaces,* Math.Nachr. 140 (1989)

[5] **Rudin, W:** *Functional Analysis,* 2d ed., McGraw-Hill Book Company, New York, (1991)