8 МСДР 2004, (39 - 48)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЗА НЕКОИ ХОМОГЕНИ ПРОБЛЕМИ СО СОПСТВЕНИ ВРЕДНОСТИ ОД ТРЕТ РЕД

Слободанка С. Георгиевска
Градежен факултет, Скопје
e-mail: slobodanka@gf.ukim.edu.mk

Апстракт. *Во оваа нота се определени контурени проблеми (проблеми со сопствени вредности) од трет ред чие решение (сопствени функциии) е хомогена функција од втора степен од решението (сопствената функција) и неговиот (нивниот) извод од контурен проблем (проблем со сопствени вредности) од втор ред*

0. Вовед

Проблемите со сопствени вредности како и контурните проблеми со диференцијална равенка од непарен ред поретко се предмет на разгледување во смисол на нивно решавање. Од тие причини на мислење сме дека определувањето на нивните решенија (сопствени функции) со помош на проблеми кои се полесно решливи, кои се од понизок ред е од интерес.

Овде ќе се определува решение на една класа контурни проблеми од трет ред со помош на контурни проблеми од втор ред.

Така во трудот [1] опререлено е решение на контурен проблем од n+1-ви ред чие решени е n-та степен од решението на контурен проблем од втор ред.

Во трудот [2] определено е решение на контурни проблеми од трет и четврти ред како производ на два контурни проблеми од втор ред.

Овде ќе разгледаме контурни проблеми од трети ред чие решение е хомогена функција од втора степен по решението и неговиот извод од контурен проблем од втор ред.

Во трудот [4] определена е диференцијалната равенка од трети ред чии интеграли се производи од интеграли и нивните изводи на линеарни диференцијални равенки од втор ред.

1. Определување на диференцијалната равенка

Нека ни е познато решението на контурниот проблем со диференцијална равенка од втор ред

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0, \qquad p, q - \text{константи} \tag{1}$$

и Штурмови контурни услови

$$\alpha_{10} y_a + \alpha_{11} y'_a = 0 \tag{2.1}$$

$$\beta_{20} y_b + \beta_{21} y'_b = 0 \tag{2.2}$$

каде $y_c = y(c), \quad y'_c = y'(c)$ и $c = a, b.$

Диференцијалната равенка

$$\begin{vmatrix} z & A & B & C \\ z' & A_1 & B_1 & C_1 \\ z'' & A_2 & B_2 & C_2 \\ z''' & A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

каде

$$A_i = -q\,B_{i-1}$$

$$B_i = 2\,A_{i-1} - p\,B_{i-1} - 2q\,C_{i-1} \qquad i=1,2,3; \tag{4}$$

$$C_i = B_{i-1} - 2p\,C_{i-1}$$

и

$$A_0=A, \quad B_0=B \text{ и } C_0=C$$

има решение z хомогена функција од втора степен по y и y'

$$z = A\,y^2 + B\,y\,y' + C\,y'^2 \quad (A,B,C \text{ - константи}) \tag{5}$$

каде y е решение на диференцијалната равенка (1), а y' неговиот извод , [4].

2. Определување на контурните услови

За да ги определиме контурните услови со баранато својство за функцијата z, истата ќе ја диференцираме и ќе ги користиме воведените ознаки (4). При тоа се добива системот равенки по y^2, yy', y'^2

$$\begin{aligned} A\,y^2 + B\,y\,y' + C\,y'^2 &= z \\ A_1\,y^2 + B_1\,y\,y' + C_1\,y'^2 &= z' \\ A_2\,y^2 + B_2\,y\,y' + C_2\,y'^2 &= z''. \end{aligned} \tag{6}$$

чие решение е

$$y^2 = \frac{\Delta_{y^2}}{\Delta}, \quad y\,y' = \frac{\Delta_{y\,y'}}{\Delta} \quad \text{и} \quad y'^2 = \frac{\Delta_{y'^2}}{\Delta}, \tag{7}$$

каде

$$\Delta_{y^2} = \begin{vmatrix} z & B & C \\ z' & B_1 & C_1 \\ z'' & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{y\,y'} = \begin{vmatrix} A & z & C \\ A_1 & z' & C_1 \\ A_2 & z'' & C_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y'^2} = \begin{vmatrix} A & B & z \\ A_1 & B_1 & z' \\ A_2 & B_2 & z'' \end{vmatrix}$$

и

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Понатаму, ако контурните услови (2.1) ги помножиме соодветно со y_a и y'_a се добиваат равенките

$$\alpha_{10}\, y_a{}^2 + \alpha_{11}\, y_a y'_a = 0$$

$$\alpha_{10}\, y_a\, y'_a + \alpha_{11}\, y'^{\,2}_a = 0\ .$$

Заменувајќи ги изразите (7) соодветно се добива

$$\alpha_{10}\, \Delta_{y_a{}^2} + \alpha_{11}\, \Delta_{y_a y'_a} = 0 \qquad (8.1)$$

$$\alpha_{10}\, \Delta_{y_a\, y'_a} + \alpha_{11}\, \Delta_{y'^{\,2}_a} = 0 \qquad (8.2)$$

односно

$$\alpha_{10}\begin{vmatrix} z_a & B & C \\ z'_a & B_1 & C_1 \\ z''_a & B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \alpha_{11}\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.1)$$

$$\alpha_{10}\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} + \alpha_{11}\begin{vmatrix} A & B & z_a \\ A_1 & B_1 & z'_a \\ A_2 & B_2 & z''_a \end{vmatrix} = 0 \qquad (9.2)$$

т.е. два контурни услови во точката $x=a$.

Равенките

$$\beta_{20}\begin{vmatrix} z_b & B & C \\ z'_b & B_1 & C_1 \\ z''_b & B_2 & C_2 \end{vmatrix} + \beta_{21}\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (9.3)$$

$$\beta_{20}\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} + \beta_{21}\begin{vmatrix} A & B & z_b \\ A_1 & B_1 & z'_b \\ A_2 & B_2 & z''_b \end{vmatrix} = 0\,, \qquad (9.4)$$

ги определуваат контурни услови во точката $x=b$.

Овие четири равенки (9.1) - (9.4) определуваат $\binom{4}{3}=4$ тројки контурни услови, кои заедно со диференцијалната равенка (3) определуваат $\binom{4}{3}=4$ контурни проблеми кои имаат решение од видот што го бараме, (5)

Ако p и q се параметри тогаш имаме проблеми со сопствени вредности

Пример 1. *За проблемот со сопствени вредности со диференцијална раваенка*

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad \lambda\text{-параметар} \tag{10}$$

и контурни услови

$$\begin{aligned} y(a) &= 0. \\ y(b) &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

знаеме дека има сопствени вредности

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

и сопствени функции

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\, sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \tag{12}$$

[5, стр.365, **2.9** (a)]

За овој проблем $q=\lambda$, $p=0$; $\alpha_{10}=1$, $\alpha_{11}=0$ и $\beta_{20}=1$, $\beta_{21}=0$. При овие вредности соодветно диференцијалната равенка (3) го прима видот

$$\begin{vmatrix} z & A & B & C \\ z' & -\lambda B & 2(A-\lambda C) & B \\ z'' & -2\lambda(A-\lambda C) & -4\lambda B & 2(A-\lambda C) \\ z''' & 4\lambda^2 B & -8\lambda(A-\lambda C) & -4\lambda B \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

Исто така, соодветно и контурните услови (9.1)–(9.4) се од вид

$$\begin{vmatrix} z_a & B & C \\ z'_a & B_1 & C_1 \\ z''_a & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} z_a & B & C \\ z'_a & 2(A-\lambda C) & B \\ z''_a & -4\lambda B & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0, \quad (13.1)$$

$$\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е } \begin{vmatrix} A & z_a & C \\ -\lambda B & z'_a & B \\ -2\lambda(A-\lambda C) & z''_a & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0, \quad (13.2)$$

$$\begin{vmatrix} z_b & B & C \\ z'_b & B_1 & C_1 \\ z''_b & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} z_b & B & C \\ z'_b & 2(A-\lambda C) & B \\ z''_b & -4\lambda B & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0, \quad (13.3)$$

$$\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е } \begin{vmatrix} A & z_b & C \\ -\lambda B & z'_b & B \\ -2\lambda(A-\lambda C) & z''_b & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0. \quad (13.4)$$

Од претходно изложенето може да се констатира дека четири проблеми со сопствени вредности со диференцијална равенка (13) и една тројка од контурните услови (13.1) – (13.4) имаат сопствени функции

$$z_n(x) = \frac{2Cn^2\pi^2}{(b-a)^3} + \frac{2}{b-a}\left(A - \frac{Cn^2\pi^2}{(b-a)^2}\right) sin^2 \frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \frac{Bn\pi}{(b-a)^2} sin \frac{2n\pi(x-a)}{b-a}$$

кои го имаат својството да се хомогена функција од втор степен од сопствените функции φ_n (12) и нејзиниот извод, т.е.

$$z_n(x) = A\varphi_n{}^2 + B\varphi_n\varphi_n{}' + C\varphi_n{}'^2$$

Пример 2. *Проблемот со сопствени вредности со диференцијална рваенка* (10) *и контурни услови*

$$y'(a)=0.$$
$$y'(b)=0$$

има сопствени вредности

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

и сопствени функции

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\, cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a}, \quad n \geq 1$$

[5,стр.365, **2.9** (б)].

За овој случај ; $\alpha_{10}=0$. $\alpha_{11}=1$ и $\beta_{20}=0$. $\beta_{21}=1$. При овие вредности соодветно диференцијалната равенка (3) го прима видот (13) и соодветните контурни услови се од вид

$$\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е.} \quad \begin{vmatrix} A & z_a & C \\ -\lambda B & z'_a & B \\ -2\lambda(A-\lambda C) & z''_a & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0 \quad (14.1)$$

$$\begin{vmatrix} A & B & z_a \\ A_1 & B_1 & z'_a \\ A_2 & B_2 & z''_a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е.} \quad \begin{vmatrix} A & B & z_a \\ -\lambda B & 2(A-\lambda C) & z'_a \\ -2\lambda(A-\lambda C) & -4\lambda B & z''_a \end{vmatrix} = 0 \quad (14.2)$$

$$\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е} \quad \begin{vmatrix} A & z_b & C \\ -\lambda B & z'_b & B \\ -2\lambda(A-\lambda C) & z''_b & 2(A-\lambda C) \end{vmatrix} = 0 \quad (14.3)$$

$$\begin{vmatrix} A & B & z_b \\ A_1 & B_1 & z'_b \\ A_2 & B_2 & z''_b \end{vmatrix} = 0 \quad \text{т.е.} \quad \begin{vmatrix} A & B & z_b \\ -\lambda B & 2(A-\lambda C) & z'_b \\ -2\lambda(A-\lambda C) & -4\lambda B & z''_b \end{vmatrix} = 0 \quad (14.4)$$

а сопствените функции

$$z_n(x) = A\varphi_n{}^2 + B\varphi_n\varphi_n' + C\varphi_n'^2$$

го примаат видот

$$z_n(x) = \frac{2Cn^2\pi^2}{(b-a)^3} + \frac{2}{b-a}\left(A - \frac{Cn^2\pi^2}{(b-a)^2}\right)\cos^2\frac{n\pi(x-a)}{b-a} -$$

$$\frac{Bn\pi}{(b-a)^2}\sin\frac{2n\pi(x-a)}{b-a} \qquad (15)$$

Пример 3 *Проблемот со сопствени вредности со диференцијална равенка* (10) *и контурни услови*

$$\alpha\, y(a) - y'(a) = 0 \qquad (16.1)$$

$$\alpha\, y(b) - y''(b) = 0 \qquad (16.2)$$

има сопствени функции

$$\varphi_n = cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a} + \alpha\frac{b-a}{n\pi}\,sin\frac{n\pi(x-a)}{b-a}$$

[5,стр.365, **2.9** (в)].

За овој случај ; $\alpha_{10}=\alpha$. $\alpha_{11}=-1$ и $\beta_{20}=\alpha$. $\beta_{21}=-1$. При овие вредности соодветно диференцијалната равенка (3) го прима видот (13) и соодветните контурни услови се

$$\alpha\begin{vmatrix} z_a & B & C \\ z'_a & B_1 & C_1 \\ z''_a & B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.1)$$

$$\alpha\begin{vmatrix} A & z_a & C \\ A_1 & z'_a & C_1 \\ A_2 & z''_a & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & z_a \\ A_1 & B_1 & z'_a \\ A_2 & B_2 & z''_a \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.2)$$

$$\alpha\begin{vmatrix} z_b & B & C \\ z'_b & B_1 & C_1 \\ z''_b & B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.3)$$

$$\alpha\begin{vmatrix} A & z_b & C \\ A_1 & z'_b & C_1 \\ A_2 & z''_b & C_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A & B & z_b \\ A_1 & B_1 & z'_b \\ A_2 & B_2 & z''_b \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.4)$$

кои можат да се запишат и во вид

$$\left.\begin{vmatrix} z & A+\alpha\, B & C \\ z' & A_1+\alpha\, B_1 & C_1 \\ z'' & A_2+\alpha\, B_2 & C_2 \end{vmatrix}\right|_{x=a,b} = 0\,,\quad \left.\begin{vmatrix} A & z_b & B+\alpha\, C \\ A_1 & z'_b & B_1+\alpha\, C_1 \\ A_2 & z''_b & B_2+\alpha\, C_2 \end{vmatrix}\right|_{x=a,b} = 0\,. \qquad (18)$$

Сопствени функции за проблемите со сопствени вредности (13)–(18) овој случај се

$$z_n = A+\alpha^2 C+\left[A\frac{\alpha^2(b-a)^2-n^2\pi^2}{n^2\pi^2}+C\frac{n^2\pi^2-(b-a)^2}{n^2\pi^2}\right]sin^2\frac{n\pi(x-a)}{b-a}+$$

$$+\left[A\frac{\alpha(b-a)}{n\pi}+B\frac{\alpha^2(b-a)^2-n^2\pi^2}{n^2\pi^2}-C\frac{\alpha\, n\pi}{b-a}\right]\sin\frac{2n\pi(x-a)}{b-a}+$$

$$+B\alpha\cos\frac{2n\pi(x-a)}{b-a}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Georgievska S. S. *A boundary problem of the third order and fourt orders as a product of boundary problem of the second order*. Математички билтен, Скопје**19, (XVV)** (53-64), 1995

[2] Georgievska S. S. : *Reduction of a boundary problem of n+1-th order to a boundary problem of the second order*. Прилози. Одделение за мат.тех. науки, МАНУ, Скопје**17, (1-2)** (47-56) 1996

[3] Шапкарев И. А. *За еден контурен проблем од трет ред* Годишен зборник на Електротехнички факултет, Скопје, **6-7** (**11-13)** (47-53) 1990

[4] Шапкарев И. А. *Конструкција на линеарни диференцијални равенки од трет ред чии интеграли се производи од интегралите и нивните изводи на линерни дифренцијални равенки од втор ред* Годишен зборник на Електротехнички факултет, Скопје, **6-7** (**11-13)** (240-249) 1990

[5] Э.Камке- *Спровочник по обыкновенным диференциалъным уравнениям*, издателство Наука, Москва,1971

Градежен факултет

Катедра за математика, Скопје

e-mail:slobodanka@gf.ukim.edu.mk