8 МСДР 2004, (15 - 20)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија

ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ИНВАРИЈАНТНОСТ НА ЕДНА БРОЈНА КАРАКТЕРИСТИКА ЗА ЕДНА КЛАСА ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Боро М. Пиперевски
Електротехнички факултет–Скопје
e–mail: borom@etf.ukim.edu.mk

Апстракт:

Во овој труд се разгледува класа диференцијални равенки (1),(3),(4),(5), врзани со трансформацијата (2). Се покажува дека сите равенки имаат иста дискриминанта на своите карактеристични равенки (6),(7),(8),(9). До истиот заклучок се доаѓа и за класата диференцијални равенки од вид (10) (12),(13),(14),(15), (16),(17),(18) добиени со трансформацијата (11).

клучни зборови: инваријантност, диференцијална равенка, трансформација

I. Нека е дадена линеарна диференцијална равенка од втор ред од вид

$$(x-x_1)(x-x_2)y'' + (b_1x + b_0)y' + c_0y = 0 \qquad (1)$$

каде $x_1 \neq x_2$, b_1, b_0 , c_0 се реални константи.

Во [1] е покажано дека со трансформацијата дефинирана со

$$y = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta} z \qquad (2)$$

диференцијалната равенка (1) се трансформира во најмногу три диференцијални равенки од ист вид т.е. во равенките:

$$(x-x_1)(x-x_2)z_1'' + [(2\alpha+b_1]\, x -2\alpha\, x_2 + b_0]z_1' + [\alpha\,(\alpha-1) + \alpha b_1 + c_0]z_1 = 0, \qquad (3)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)z_2'' + [(2\beta+b_1]\, x - 2\beta\, x_1 + b_0]z_2' + [\beta(\beta-1) + \beta b_1 + c_0\,]z_2 = 0\,, \qquad (4)$$

$$(x-x_1)(x-x_2)z_3'' + [(2\alpha+2\beta+b_1]\, x -2\alpha\, x_2 - 2\beta\, x_1 + b_0]z_3' + [2\alpha\beta + \alpha\,(\alpha-1) + \beta(\beta-1) + (\alpha+\beta)b_1 + c_0\,]z_3 = 0\,, \qquad (5)$$

каде

$$\alpha = 1 - \frac{b_1x_1 + b_0}{x_1 - x_2}\,,\ \beta = 1 - \frac{b_1x_2 + b_0}{x_2 - x_1}\,.$$

Во литературата е познато дека потребен и доволен услов диференцијалната равенка (1) да има едно полиномно решение од степен n е условот n да биде корен на квадратната равенка

$$t^2 + (b_1 - 1)t + c_0 = 0, \qquad (6)$$

и тоа помалиот ако и двата корени се природни броеви. Поради својата важност оваа квадратна равенка ќе ја наречеме карактеристична равенка за диференцијалната равенка (1) со дискриминанта $\Delta = (b_1 - 1)^2 - 4c_0$.

За диференцијалните равенки (3), (4) и (5) соодветните карактеристични равенки се

$$t^2 + (2\alpha+b_1 - 1)t + \alpha\,(\alpha-1) + \alpha b_1 + c_0 = 0, \qquad (7)$$

$$t^2 + (2\beta+b_1 - 1)t + \beta(\beta-1) + \beta b_1 + c_0 = 0, \qquad (8)$$

$$t^2 + (2\alpha+2\beta+b_1 - 1)t + 2\alpha\beta + \alpha\,(\alpha-1) + \beta(\beta-1) + (\alpha+\beta)b_1 + c_0 = 0. \qquad (9)$$

Лесно се покажува дека и овие три карактеристични равенки имаат иста дискриминанта Δ . Според тоа можеме да заклучиме дека дискриминантата како бројна карактеристика е инваријантна во однос на трансформацијата (2).

Со смената

$$y = (x - x_1)^{\frac{\alpha - 1}{2}} (x - x_2)^{\frac{\beta - 1}{2}} w \ ,$$

диференцијалната равенка (1) се трансформира во диференцијална равенка од вид (нормален вид) :

$$4(x-x_1)^2 (x-x_2)^2 w'' + (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)w = 0.$$

Соодветната карактеристична равенка за оваа диференцијална равенка е квадратната равенка

$$t^2 - t + \frac{a_2}{4} = 0$$

и може да се покаже дека и дискриминантата на оваа квадратна равенка е еднаква на Δ.

II. Нека е дадена линеарна диференцијална равенка од втор ред од вид

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) y'' + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)y' + (c_1 x + c_0) y = 0 \quad (10)$$

каде $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, b_2, b_1, b_0 , c_1, c_0 се реални константи.

Во [1] е покажано дека со трансформацијата дефинирана со

$$y = (x-x_1)^{\alpha}(x-x_2)^{\beta}(x-x_3)^{\gamma} z \qquad (11)$$

диференцијалната равенка (10) се трансформира во најмногу 7 други диференцијални равенки од ист вид :

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_1'' + [(2\alpha + b_2)\, x^2 - (2\alpha\, x_3 + 2\alpha\, x_2 - b_1)\, x + 2\alpha\, x_2\, x_3 + b_0] z_1' + \{[\alpha\, (\alpha-1) + \alpha b_2 + c_1]\, x + \alpha\, (\alpha-1)(x_1 - x_2 - x_3) + \alpha\, (b_2 x_1 + b_1) + c_0\} z_1 = 0, \tag{12}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_2'' + [(2\beta + b_2)\, x^2 - (2\beta\, x_1 + 2\beta\, x_3 - b_1)\, x + 2\beta\, x_1 x_3 + b_0] z_2' + \{[\beta(\beta-1) + \beta b_2 + c_1]\, x + \beta(\beta-1)(x_2 - x_1 - x_3) + \beta(b_2 x_2 + b_1) + c_0\} z_2 = 0, \tag{13}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_3'' + [(2\gamma + b_2)\, x^2 - (2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - b_1)\, x + 2\gamma x_1 x_2 + b_0] z_3' + \{[\gamma\, (\gamma-1) + \gamma b_2 + c_1]\, x + \gamma\, (\gamma-1)(x_3 - x_1 - x_2) + \gamma(b_2 x_3 + b_1) + c_0\} z_3 = 0, \tag{14}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_4'' + [(2\alpha + 2\beta + b_2)\, x^2 - (2\alpha\, x_3 + 2\alpha\, x_2 + 2\beta\, x_1 + 2\beta\, x_3 - b_1)\, x + 2\alpha\, x_2\, x_3 + 2\beta\, x_1 x_3 + b_0]\, z_4' + \{[2\alpha\beta + \alpha\, (\alpha-1) + \beta(\beta-1) + (\alpha+\beta) b_2 + c_1]\, x - 2\alpha\beta x_3 + \alpha\, (\alpha-1)(x_1 - x_2 - x_3) + \beta(\beta-1)(x_2 - x_1 - x_3) + \alpha\, (b_2 x_1 + b_1) + \beta(b_2 x_2 + b_1) + c_0\} z_4 = 0, \tag{15}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_5'' + [(2\alpha + 2\gamma + b_2)\, x^2 - (2\alpha\, x_3 + 2\alpha\, x_2 + 2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - b_1)\, x + +2\alpha\, x_2\, x_3 + 2\gamma x_1 x_2 + b_0] z_5' + \{[2\alpha\gamma + \alpha\, (\alpha-1) + \gamma\, (\gamma-1) + (\alpha+\gamma) b_2 + c_1]\, x - 2\alpha\gamma x_2 + \alpha\, (\alpha-1)(x_1 - x_2 - x_3) + \gamma\, (\gamma-1)(x_3 - x_1 - x_2) + \alpha\, (b_2 x_1 + b_1) + \gamma(b_2 x_3 + b_1) + c_0\} z_5 = 0, \tag{16}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_6'' + [(2\beta + 2\gamma + b_2)\, x^2 - (2\beta\, x_1 + 2\beta\, x_3 + 2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - b_1)\, x + +2\beta\, x_1 x_3 + 2\gamma x_1 x_2 + b_0] z_6' + \{[2\beta\gamma + \beta(\beta-1) + \gamma\, (\gamma-1) + (\beta+\gamma) b_2 + c_1]\, x - 2\beta\gamma x_1 + \beta(\beta-1)(x_2 - x_1 - x_3) + \gamma\, (\gamma-1)(x_3 - x_1 - x_2) + \beta(b_2 x_2 + b_1) + \gamma(b_2 x_3 + b_1) + c_0\} z_6 = 0, \tag{17}$$

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\, z_7'' + [(2\alpha + 2\beta + 2\gamma + b_2)\, x^2 - (2\alpha\, x_3 + 2\alpha x_2 + 2\beta\, x_1 + 2\beta\, x_3 + 2\gamma x_1 + 2\gamma x_2 - b_1)\, x + 2\alpha\, x_2\, x_3 + 2\beta\, x_1 x_3 + 2\gamma x_1 x_2 + b_0] z_7' + \{[2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1) + \gamma\, (\gamma-1) + (\alpha+\beta+\gamma) b_2 + c_1]\, x - 2\alpha\beta x_3 - 2\alpha\gamma x_2 - 2\beta\gamma x_1 + \alpha(\alpha-1)(x_1 - x_2 - x_3) + \beta(\beta-1)(x_2 - x_1 - x_3) + \gamma(\gamma-1)(x_3 - x_1 - x_2) + \alpha\, (b_2 x_1 + b_1) + \beta(b_2 x_2 + b_1) + \gamma(b_2 x_3 + b_1) + c_0\} z_7 = 0, \tag{18}$$

каде

$$\alpha = 1 - \frac{b_2 x_1^2 + b_1 x_1 + b_0}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}, \quad \beta = 1 - \frac{b_2 x_2^2 + b_1 x_2 + b_0}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)},$$

$$\gamma = 1 - \frac{b_2 x_3^2 + b_1 x_3 + b_0}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)}.$$

Соодветната карактеристична равенка за равенката (10) е квадратната равенка

$$t^2 + (b_2 - 1)t + c_1 = 0,$$

чија дискриминанта е $\Delta = (b_2 - 1)^2 - 4c_1$.

Може да се покаже дека сите карактеристични равенки за диференцијалните равенки (12),(13),(14),(15),(16),(17),(18), добиени со трансформацијата (11), кои се од ист вид со равенката (10), имаат иста дискриминанта Δ.

On Invariation for a class of differential equations of the second order numerical characteristic

Boro Piperevski
Faculty of Electrical Engineering, P.O.Box 574, Skopje, Macedonia
e–mail: borom@etf.ukim.edu.mk

Abstract:

In this article a class of differential equations (1),(3),(4),(5), connected with the transformation (2), is considered. It is showh that all equations have the same discriminant of its characteristic equations (6),(7),(8),(9). Also the same conclution can be deduced for the class of differential equations (10),(12),(13),(14),(15),(16),(17),(18), which are gotton with the transformation (11).

key words: invariantion, differential equation, transformation

ЛИТЕРАТУРА

1. Boro Piperevski: One transformation of a class of linear differential equations of the second order, Proceedings, Department of Electrical Engineering, tome 6-7, (27-34) 1990, Skopje, Macedonia.
2. Boro Piperevski: On the existence and construction of the racional solutions of a class of linear differential equations of the second order with polynomial coefficients , СМИМ, Математички билтен бр.21 (21-26) 1997, Skopje, Macedonia.