8 МСДР 2004, (33 - 38)
Зборник на трудови
30.09.- 03.10.2004 год.
Охрид, Македонија
ISBN 9989 – 630 – 49 – 6
COBISS.MK – ID 61901322

ЕГЗИСТЕНЦИЈА И КОНСТРУКЦИЈА НА ПОЛИНОМНО РЕШЕНИЕ НА ЕДНА ПОДКЛАСА ЛИНЕАРНИ ХОМОГЕНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Елена Хаџиева, Боро М. Пиперевски
Електротехнички факултет–Скопје
e–mail: borom@etf.ukim.edu.mk
e–mail: hadzieva@etf.ukim.edu.mk

Апстракт : Во овој труд се разгледува диференцијална равенка од вид (1). Со метод на трансформација и користење на соодветни резултати е издвоена една подкласа диференцијални равенки од вид (1) која има едно полиномно решение за кое е конструирана соодветна формула во конечен вид.

I. Во [1] е покажано дека диференцијална равенка од вид:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)z'' + (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0)z' + (\gamma_1 x + \gamma_0)\, z = 0, \qquad (1)$$

$x_1 \neq x_2 \neq x_3$, $x_1 \neq x_2$, x_1, x_2, x_3 , β_2 , β_1, β_0, γ_1, $\gamma_0 \in R$.

има едно полиномно решение ако постои природен број n (помалиот ако постојат два) така што да се задоволени условите

$$\begin{gathered} n^2 + (\beta_2 - 1)n + \gamma_1 = 0, \\ \beta_0 + x_2x_3 - (x_2+x_3)x_1 + (\beta_2 + 1)x_1^2 + \beta_1 x_1 = 0, \\ \gamma_0\beta_1 + \gamma_0^2 - \gamma_1\beta_0 + (\gamma_1+\beta_2)(\gamma_1 x_1 + 2\gamma_0)x_1 = 0, \end{gathered} \qquad (2)$$

При тоа општото решение е дадено со формулата

$$z = e^{-F}\{(x+K)(x-x_2)^{n-1}(x-x_3)^{n-1} e^F [C_1 + C_2 \int (x-x_1)^{n-1}(x-x_2)^{1-n}(x-x_3)^{1-n}(x+K)^{-2}\, dx]\}^{(n-1)},$$

каде што

$$F=\int\frac{Mx+N}{(x-x_2)(x-x_3)}\ ,\quad M=\beta_2-1,\qquad N=\beta_1+x_1+x_1\beta_2,$$

$$K=-\frac{x_1\gamma_1+n(\beta_1+2x_1\beta_2+x_1\gamma_1+\gamma_0)}{\gamma_1}$$

Во [2] е покажано дека истата равенка (1) има едно полиномно решение ако постои природен број n така што да се задоволени условите

$$\begin{gathered} n^2+(\beta_2-1)n+\gamma_1=0, \\ 3n(n+1)+2(n+1)\beta_2+\gamma_1=0, \\ n(n+1)(-x_1-x_2-x_3)+(n+1)\beta_1+\gamma_0=0 \end{gathered} \tag{3}$$

При тоа општото решение е дадено со формулата

$$z=AF^{-1}[A^nF(C_1+C_2\int A^{-(n+1)}F^{-1}\,dx)]^{(n+1)},$$

каде што $A=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, $B=\beta_2x^2+\beta_1x+\beta_0$, $F=e^{\int\frac{B}{A}dx}$.

II. Нека е дадена диференцијалната равенка од вид:

$$(x-x_1)(x-x_2)y''+(b_1x+b_0)y'+c_0y=0\ , \tag{4}$$

$x_1\neq x_2$, $x_1,x_2,b_1,b_0,c_0\in R$.

Во [3] е покажано дека равенката (4) има општо решение полином ако и само ако постојат природни броеви m и n така што се задоволени условите

$$\begin{aligned} &n(n-1)+nb_1+c_0=0, \\ &(2n+m-1)+b_1=0 \\ &(r+n)x_2+(m+n-r-1)x_1-b_0=0, \end{aligned} \tag{5}$$

за некое $r\in\{0, 1, 2, ..., m-1\}$.

Со користење на условите (5), класата линеарни диференцијални равенки (4) кои имаат општо решение полином го има следниот општ вид:

$$(x-x_1)(x-x_2)y'' - [(2n+m-1)x-(r+n)x_2 -$$
$$(m+n-r-1)x_1]y' + n(n+m)y = 0\,, \qquad (6)$$

и општото решение ќе биде дадено со формулата

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 P_{n+m}(x),$$

односно

$$y = C_1 (x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\frac{d^n}{dx^n}[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}] +$$
$$+ C_2 (x-x_1)^{n+r+1}(x-x_2)^{n+m-r}\frac{d^n}{dx^n}[(x-x_1)^{-r-1}(x-x_2)^{-m+r}$$
$$\int (x-x_1)^r (x-x_2)^{m-r-1}dx]\ . \qquad (7)$$

Со замената y = x z , равенката (4) се трансформира во равенката

$$x(x-x_1)(x-x_2)z'' + [(b_1+2)x^2 + (b_0 - 2x_1 - 2x_2)x + 2x_1x_2]z' +$$
$$[(b_1 + c_0)x + b_0]z = 0, \qquad (1')$$

односно равенката

$$x(x-x_1)(x-x_2)z'' + (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0)z' + (\gamma_1 x + \gamma_0)z = 0, \qquad (1'')$$

Оваа равенка припаѓа на класата диференцијални равенки од вид (1) која е изучувана во трудовите [1,2] . Како што е покажано во точка I., во тие трудови се добиени повеќе групи доволни услови за егзистенција и конструкција на едно полиномно решение.

Нека за диференцијалната равенка (1') односно (1") се задоволени условите (5) и нека $y_1 = P_n(x)$ и $y_2 = P_{n+m}(x)$ се полиномните решенија на равенката (4) односно (6).
Во согласност со замената равенката (1') односно (1") има две решенија $z_1 = \frac{1}{x} P_n(x)$, $z_2 = \frac{1}{x} P_{n+m}(x)$, кои во општ случај не се полиноми.

Нека формираме линеарна комбинација $\lambda P_n(x) + P_{n+m}(x)$ и нека го определиме λ така што $\lambda P_n(x) + P_{n+m}(x) = x\, Q_{n+m-1}(x)$, при што $Q_{n+m-1}(x)$ е полином од $n + m - 1$ ви степен. Во согласност со смената полиномот $Q_{n+m-1}(x)$ ќе биде едно партикуларно решение на равенката (1') односно (1") . Со тоа е докажана следната теорема:

ТЕОРЕМА: Нека е дадена диференцијалната равенка (1') односно (1") . Ако постојат природни броеви m и n така што се задоволени условите

$$\begin{aligned} &n^2+(\beta_2-3)n+\gamma_1-\beta_2+2=0,\\ &2n+m+\beta_2-3=0 \qquad (8)\\ &(r+n)x_2+(m+n-r-1)x_1-\gamma_0=0, \end{aligned}$$

за некое r $\in$ {0, 1, 2, ..., m -1}, тогаш равенката (1') односно (1") има едно полиномно решение дадено со формулата

$$z=\frac{1}{x}[\lambda P_n(x)+P_{n+m}(x)], \qquad (9)$$

каде што полиномите $P_n(x)$ и $P_{n+m}(x)$ се дадени со формулите (7). При тоа параметарот λ е определен со тоа што слободниот член на полиномот $\lambda P_n(x) + P_{n+m}(x)$ да биде еднаков на нула.

Во согласност со равенката (6), равенката (1') односно (1"), класата равенки дефинирана со теоремата ќе го има општиот вид:

$$x(x-x_1)(x-x_2)z''+\{(3-2n-m)x^2+[(n+m-r-3)x_1+(n+r-2)x_2]x+$$

$$+2x_1x_2\}z'+[(n^2-2n+nm-m+1)x+(n+m-r-1)x_1+(n+r)x_2]z=0.$$

III. Пример 1. Диференцијалната равенка

$$x(x-1)(x-2)z'' + (-3x^2 + 2x + 4)z' + 8z = 0,$$

ги задоволува условите од теоремата и во согласност со формулата (9) има едно полиномно решение

$$z = 3x^4 - 20x^3 + 50x^2 - 60x + 30.$$

Општото решение ќе биде дадено со формулата

$$z = C_1(3x^4 - 20x^3 + 50x^2 - 60x + 30) + C_2\frac{5x-8}{x}.$$

Пример 2. Диференцијалната равенка

$$x(x-1)(x-2)z'' + (-3x^2 + x + 4)z' + (3x + 7)z = 0,$$

ги задоволува условите од теоремата и во согласност со формулата (9) има едно полиномно решение

$$z = 11x^3 - 88x^2 + 168x - 96 .$$

Општото решение ќе биде дадено со формулата

$$z = C_1(11x^3 - 88x^2 + 168x - 96) + C_2\frac{6x^2 - 16x + 11}{x}.$$

Пример 3. Диференцијалната равенка

$$x(x-1)(x-2)z'' + (x^2 + 7x - 2)z' + (-4x + 1)z = 0,$$

ги задоволува условите (2) и има едно полиномно решение

$$z = x^2 + 3x + 6.$$

Пример 4. Диференцијалната равенка

$$x(x-1)(x-2)z'' - (2x^2 + x + 1)z' + (2x + 8)z = 0,$$

ги задоволува условите (3) и има едно полиномно решение

$$z = 9x^2 - 2x - 2.$$

Забелешка 1. Диференцијалните равенки дадени во примерите 1 и 2 не ги задоволуваат условите (2) и (3) т.е. не припаѓа на класите диференцијални равенки третирани во трудовите [1] и [2]. Лесно може да се покаже дека диференцијалните равенки дадени во примерите 3 и 4 кои ги задоволуваат условите (2) односно (3), не ги задоволуваат условите од теоремата. Според тоа може да се заклучи дека е проширена класата диференцијални равенки од вид (1) кои имаат едно полиномно решение.

Забелешка 2. Диференцијалните равенки од вид (1) кои ги задоволуваат условите од теоремата можат да имаат и општо решение полином ако се додаде условот полиномното решение $P_n(x)$ на диференцијалната равенка (4) дадено со соодветната формула да има слободен член еднаков на нула.

Забелешка 3. Во [4] е покажано дека комплексните полиноми кои се решенија на диференцијални равенки од класата (1) кои ги задоволуваат условите (2), се ортогонални на кружен лак.

On existention and construction of polynomial solution of a subclass linear homogeneous differential equations of second order

Elena Hadzieva, Boro M. Piperevski
Department of Electrical Engineering
hadzieva@etf.ukim.edu.mk ; borom@etf.ukim.edu.mk

Abstract:
In this article we observe differential equation of type (1). By method of transformation and by using some previous results, we come to a subclass of differential equations of type (1) which has one polynomial solution. A formula of that solution is constructed.

Литература

1. Boro Piperevski : Sur une formule de solution polynomme d'une classe d'equations dofferentielles lineares du duxieme ordre., Bulletin mathematique de la SDM de SRM , tome 7-8 , p. 10-15, 1983/84, Skopje

2. Boro Piperevski : One generalization for ones of Rodriges' formula ; Proceedings, Department of Electrical Engineering, tome 5 (1987) p.93-98 , Skopje

3. Boro Piperevski; Sur des equations differentielles lineaires du duxieme ordre qui solution generale est polinome, Department of Electrical Engineering, Proceedings N^0 4, year 9, 13-17, Skopje, 1986

4. Boro Piperevski; On complex polynomials orthogonal to circle arc, Седми македонски симпозиум по диференцијални равенки, Зборник на трудови, стр. 21 - 26 , Охрид, 2002.