ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ

1. Воведни поими

Изразот:

$$F(x, f(x), f(x+h), f(x+2h), \ldots, f(x+kh)) = 0,$$

каде F е дадена функција од k+2 аргументи, f:$\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ е непозната функција, x, $h\in\boldsymbol{R}$ и $k\in N$, се вика **диференцна равенка од ред *k***. Со смена h = 1 оваа равенка се доведува до поедноставниот облик:

$$F(x, f(x), f(x+1), \ldots, f(x+k)) = 0,$$

кој и понатаму ќе го користиме. Проблемот најчесто се сведува на изнаоѓање на сите можни функции f кои го задоволуваат дадениот израз.

Во литературата диференцните равенки неретко се среќаваат и со т.н. **дискретно** обележување:

$$F(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+k}) = 0, \qquad \text{каде} \qquad y_{x+i} = f(x+i),\ i=0, 1,\ldots,k\,.$$

Можат да се сретнат исто така и како:

$$F(x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^k f(x)) = 0,$$

каде ознаката Δ го има значењето:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \text{ и } \Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)), \quad \text{za } k\in\boldsymbol{N}\,.$$

Во литературата $\Delta^k f(x)$ се именуваат како **конечни разлики** (**диференции**) **од ред** $\boldsymbol{k}$, па од тие причини диференцните равенки се среќаваат и под името **равенки со конечни разлики**.

Очевидно е дека секоја диференцна равенка од ред k сврзува најмногу $k+1$ вредности на непознатата функција: $f(x)$, $f(x+1)$, ..., $f(x+k)$ и затоа во некои случаи се нарекува и **рекурентна равенка**, а функцијата $f(x)$, рекурентна функција. Така, доколку е можно диференцната равенка да се запише во вид:

$$f(x+k) = F(x, f(x), f(x+1), f(x+2),...,f(x+k-1)),$$

тогаш со познавање на k последователни вредности на функцијата f, од равенката лесно ќе се добијат и останатите вредности.

Функцијата $f(x)$ која идентично ја задоволува диференцната равенка, односно која заменета во диференцната равенка ќе даде идентитет се вика **решение на диференцната равенка (партикуларно решение)**. Ако на некој начин може да се добие формула од која ќе се добиваат сите можни вакви решенија (функции кои идентично ја задоволуваат), тогаш велиме дека со таа формула е дадено **општото решение на диференцната равенка**.

Диференцните равенки можат да се сретнат и во најтривијалните сфери на секојдневното живеење. Нивното значење е релативно големо, а нивното познавање е скоро неопходно за секој информатичар, статистичар, демограф.

Понатаму ќе се изучуваат диференцни равенки со непозната функција од целоброен аргумент т.е. $x = n$, $f : \boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{R}$. При тоа непознатата функција $f(n)$ ќе биде општ член y_n на низа од броеви и соодветното дискретно обележување ќе биде:

$F(n , y_n , y_{n+1} , ..., y_{n+k}) = 0$, каде $y_{n+i} = f(n+i)$, $i=0, 1, 2,..., k$.

Равенките можат да се сретнат исто така и како:

$$F(n, f(n), \Delta f(n), \Delta^2 f(n), \dots , \Delta^k f(n)) = 0,$$

каде ознаката Δ го има значењето:

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n), \text{ и } \Delta^k f(n) = \Delta(\Delta^{k-1} f(n)) , \quad \text{за } k\in\boldsymbol{N}$$

ПРИМЕР 1.1. (проблем на *FIBONACCI*) Колку пара зајаци ќе се излежат во текот на 12 месеци ако на почетокот сме имале само еден пар. Притоа секој пар зајаци излежува точно еден пар секој месец, но почнувајќи од вториот месец и сите зајаци остануваат живи во текот на целото наше набљудување.
Поставување на равенката:

Да забележиме дека со $f(n)$ се означува бројот на парови зајаци во n-тиот месец, и тоа е непознатата функција која треба да се најде. Да го разгледаме $n+2$ –риот месец. Бројот на паровите не зависи само од нивниот бројот во претходниот $n+1$ –ви месец, туку и од бројот на новородени, а тој е еднаков на бројот на парови од пред два месеци, во n-тиот месец. Ако уште додадеме дека во нултиот месец немало ниеден зајак, а во првиот месец (кога сме ги купиле) бил еден пар, ќе го добиеме следново равенство:

$f(n+2) - f(n+1) - f(n) = 0$ со **почетни услови** $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$.

Ова е диференцна равенка од втор ред и ќе биде решена понатаму.

Името на овој проблем потекнува од италијанскиот математичар *Leonardo Pizano*, алиас *Fibonacci* (скратено од *filius Bonacci* што на латински значи синот на *Bonacci*).

ПРИМЕР 1.2. Една жаба се качувала низ бунар два метра дење, а ноќе слизнувала по еден метар. За колку дена жабата ќе се искачи ако бунарот е длабок десет метри?
Поставување на равенката:

Диференцната равенка на проблемот е од вид:

$$f(n+1) - f(n) = 1, \quad \text{со почетен услов} \quad f(1) = 2.$$

Со $f(n)$ ја означуваме максималната висина која жабата успеала да ја достигне во текот на n –тиот ден, а знаеме дека во првиот ден може да достигне највеќе 2 метри.

Други примери за диференцни равенки се следните:

$$f(n+1) - q\, f(n) = 0\,, \quad \text{каде } q \text{ е константа,}$$
$$f(n+1) - f(n) = d\,, \quad \text{каде } d \text{ е константа,}$$

кои одговараат на геометриската и аритметичката прогресија.

Диференцните равенки имаат значајна улога во комбинаторната анализа, теоријата на броеви, теоријата на веројатност, апроксимативната теорија, економетријата, а во нумеричката анализа многу алгоритми се сведуваат на наоѓање решенија на диференцна равенка.

Кај обичните алгебарски равенки од една непозната со фиксни коефициенти пред непознатата секогаш и решението е фиксно. За разлика од тоа, кај диференцните равенки при фиксни коефициенти решението е една функција и уште повеќе, може да зависи и од т.н. **почетни услови**. На пр. кај диференцната равенка која одговара на аритметичка прогресија, освен d мора да се знае уште и првиот член на прогресијата, што всушност претставува почетен услов за споменатата равенка. Оваа значајна разлика ќе ја илустрираме на следните неколку примери.

ПРИМЕР 1.3. Алгебарската равенка $2x - 8 = 0$ има едно фиксно решение $x = 4$.

За разлика од неа диференцната равенка $f(n+1) - f(n) = 2$ за решение ги има сите функции од обликот $f(n) = 2n + C$, $n \in \boldsymbol{N}$ и C е произволна константа. Значи без почетен услов сите функции од тој облик, како што се:

$$f(n) = 2n + 4,\ \ f(n) = 2n + 7\ ,\ \text{итн.}$$

се решенија на една единствена диференцна равенка со фиксни коефициенти.

Доколку е зададен и почетниот услов $f(1) = 2$ за диференцната равенка што ја решаваме, се добива решението $f(n) = 2n$ (константата C се добива од равенката $f(1) = 2\cdot 1 + C$ односно $2 = 2 + C$). Очевидно е дека и при даден почетен услов, решението на диференцната равенка е сепак функција, односно во овој случај **низа од броеви**.

Нека го разгледаме множеството вредности на оваа функција, како решение. Бидејќи аргументот е цел број, елементите од тоа множество (кодоменот) можеме да ги подредиме според аргументот. Така се добива множеството $\{...f(1), f(2), f(3),..., f(n),...\}$, кое, во поедноставен запис има форма ... $f(1), f(2), f(3),..., f(n),...$ Тоа е всушност еден запис на низа од $\boldsymbol{R}$ или бројна низа. Во нашиот случај е низата 2, 4, 6, ..., $2n$.... , која има општ член $f(n) = 2n$.

Во општ случај диференцните равенки не се решливи. Поради тие причини во овој дел ќе разгледаме само некои класи диференцни равенки кои се доволно проучени и за кои се изнајдени општите решенија.

2. ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ ОД ПРВ РЕД

Диференцната равенка од вид:

$$f(n+1) + [P(n) - 1]\, f(n) = Q(n), \tag{2.1}$$

каде $P(n)$ и $Q(n)$ се дадени функции од $n \in \boldsymbol{Z}$, а $f(n)$ непозната функција, се вика **линеарна диференцна равенка од прв ред**. Ако $Q(n) = 0$ тогаш равенката (2.1) се вика **хомогена**, а во спротивен случај се вика **нехомогена**.

ТЕОРЕМА 1. Линеарната хомогена диференцна равенка од прв ред од вид:

$$f(n+1) + [P(n) - 1] f(n) = 0\ ,\ n \in \boldsymbol{Z}\ , \tag{2.2}$$

има општо решение зададено со формулата:

$$f(n) = f(0) \prod_{t=0}^{n-1} [1 - P(t)], \tag{2.3}$$

под претпоставка броевите $f(0), f(1), ..., f(n-1), 1-P(0),..., 1-P(n-1)$ да не се нули. Бројот $f(0)$ се вика **почетна вредност** на функцијата $f(n)$ и претставува почетен услов.

ДОКАЗ*: Нека во равенката на аргументот му се доделат соодветно вредностите $0,1,..., n-1$.

$$f(1) = [1 - P(0)]\, f(0),$$
$$f(2) = [1 - P(1)]\, f(1),$$
....
$$f(n) = [1 - P(n-1)]\, f(n-1).$$

Ако се помножат левите и десните страни на сите овие равенства се добива равенство од кое со кратење на заедничките множители се добива формулата (2.1.3).

ПРИМЕР 2.1. Да се реши диференцната равенка

$$f(n+1) - (n+1)f(n) = 0\,, \quad n\in \boldsymbol{N}.$$

Бидејќи $P(n) - 1 = -(n+1)$ односно $P(n) = -n$, равенката ќе има општо решение

$$f(n) = f(0)\prod_{t=0}^{n-1}(1+t) = f(0)n!$$

каде ($n\in$**N**) и $n! = n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ ($n!$ се чита: "n-факториел").

ПРИМЕР 2.2. Диференцната равенка $f(n+1) - qf(n) = 0$ има општо решение

$$f(n) = f(0)\prod_{t=0}^{n-1}(1+q-1) = f(0)q^n$$

каде константата q е ненулти реален број, бидејќи $P(n) = 1-q$, (геометриска прогресија).

ПРИМЕР 2.3. Диференцната равенка $f(n+1) - f(n) = R(n)$ има општо решение:

$$f(n) = f(0) + \sum_{t=0}^{x-1} R(t)$$

каде $R(n)$ е дадена функција и $n\in \boldsymbol{N}$.
РЕШЕНИЕ: Нека на независно променливата и дадеме вредности 0,1,..., $n-1$. Тогаш ќе ги добиеме следните равенства

$$\begin{gathered} f(1) - f(0) = R(0), \\ f(2) - f(1) = R(1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \\ f(n) - f(n-1) = R(n-1). \end{gathered}$$

Со собирање на левите и десните страни на последните равенки се добива бараното решение.

ТЕОРЕМА 2. Линеарната нехомогена диференцна равенка од прв ред од вид:

$$f(n+1) + [P(n) - 1]f(n) = Q(n)\,,\ n\in \boldsymbol{Z}\,,$$

има општо решение од вид:

$$f(n)=\left\{\prod_{t=0}^{n-1}\left[1-P(t)\right]\right\}\left\{f(0)+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{Q(\nu)}{\prod_{t=0}^{\nu}\left[1-P(t)\right]}\right\}. \qquad (2.4)$$

ДОКАЗ*. Доказот се изведува со помош на т.н. метода на варијација на константите. Имено, се претпоставува дека константата $C = f(0)$ која фигурира во општото решение на соодветната хомогена диференцна равенка е функција од аргументот n и се бара тоа решение да биде решение и на нехомогената равенка. Значи општото решение на хомогената равенка (според формула (2.3))

$$f(n)=C(n)\prod_{t=0}^{n-1}\left[1-P(t)\right] \qquad (*)$$

при што $f(0) = C(n)$ го заменуваме во нехомогената равенка и добиваме:

$$C(n+1)\prod_{t=0}^{n}\left[1-P(t)\right]+\left[P(n)-1\right]C(n)\prod_{t=0}^{n-1}\left[1-P(t)\right]=Q(n),$$

односно

$$C(n+1)\prod_{t=0}^{n}\left[1-P(t)\right]-C(n)\prod_{t=0}^{n}\left[1-P(t)\right]=Q(n),$$

$$C(n+1)-C(n)=\frac{Q(n)}{\prod_{t=0}^{n}\left[1-P(t)\right]}.$$

Последната равенка е диференцна равенка во однос на непознатата функција $C(n)$ и според примерот (2. 3) има општо решение од вид:

$$C(n)=C(0)+\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{Q(\nu)}{\prod_{t=0}^{\nu}\left[1-P(t)\right]}.$$

Со замена на $C(n)$ во решението за хомогената равенка (*) се добива општото решение на нехомогената диференцна равенка (2.1) дадено со формулата (2.4).

ПРИМЕР 2.4. Да се реши диференцната равенка $f(n+1) - xf(n) = Q(n)$, каде што x е фиксен број (константа која не зависи од n), а $Q(n)$ е дадена функција ($n \in \boldsymbol{N}$).

РЕШЕНИЕ: Според теоремата 2, општото решение на диференцната равенка ќе биде дадено со формулата:

$$f(n) = \left\{ \prod_{t=0}^{n-1} [1 + x - 1] \right\} \left\{ f(0) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{Q(\nu)}{\prod_{t=0}^{\nu} [1 + x - 1]} \right\} = x^n \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{Q(\nu)}{x^{\nu+1}} + f(0) \right]$$

или $f(n) = f(0)\, x^n + Q(0)\, x^{n-1} + Q(1)\, x^{n-2} + \ldots \ldots + Q(\mathrm{n}-2)\, x + Q(n-1)$.

Ова решение е всушност алгоритам кој служи за пресметување на вредностите на еден полином за дадено $x = x_0$ ако однапред се зададени неговите коефициенти $f(0)$, $Q(0)$, ..., $Q(n\text{-}1)$. Навистина ако на пример е даден полином $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, тогаш со рекурентната формула $f(k+1) = x_0f(k) + a_{k+1}$, за $k = 0, n-1$, и $f(0) = a_0$, ќе се добие $P_n(x_0) = f(n)$.

Алгоритмот се состои во пресметување на секој нареден член од функцијата $f(n)$ со помош на оваа рекурентна формула. Во литературата е познат како **Хорнерова шема**.

ПРИМЕР 2.5. Да се реши диференцната равенка

$$f(n+1) - f(n) = n.$$

РЕШЕНИЕ: Во овој случај $P(n) = 0$, $Q(n) = n$. Со замена во формулата од теорема 2, се добива општото решение:

$$f(n) = \prod_{t=0}^{n-1} [1-0] \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\nu}{1} + f(0) \right] = \frac{n(n-1)}{2} + f(0).$$

ПРИМЕР 2.6. Да се реши равенката $f(n+1) - f(n) = 1$ со почетен услов $f(1) = 2$.

РЕШЕНИЕ: Бидејќи $P(n) = 0$, $Q(n) = 1$, за општото решение се добива формулата $f(n) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{1} + f(0) = n + f(0)$.

Од почетниот услов се добива $f(0) = 1$, што значи дека бараното решение е $f(n) = n+1$.

ПРИМЕР 2.7. Даден е полином $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. Со помош на Хорнерова шема да се пресмета $P_3(5)$.

РЕШЕНИЕ: $f(k+1) = 5f(k) + a_{k+1}$, за $k = 0, 1$ и 2; $f(0) = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 3$, $a_3 = -1$; $f(1) = 3$; $f(2) = 18$; $f(3) = 89$; $P_3(5) = 89$.

3. ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР РЕД

Диференцната равенка од втор ред од вид:

$$f(n+2) + P(n)f(n+1) + Q(n)f(n) = R(n), \qquad (3.1)$$

се вика **линеарна диференцна равенка од втор ред**. Ако $R(n)=0$ тогаш равенката се вика **хомогена**, а во спротивен случај **нехомогена**.

СВОЈСТВО: Нека е дадена линеарна хомогена диференцна равенка од втор ред и нека функциите $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ се две нејзини партикуларни решенија. Тогаш и функцијата $C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n)$ за произволни $C_1,C_2 \in \boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{C}$ е множеството на комплексните броеви) е исто така нејзино решение.

ДОКАЗ: Навистина, со замена во равенката се добива:

$$[C_1\varphi_1(n+2) + C_2\varphi_2(n+2)] + P(n)[C_1\varphi_1(n+1) + C_2\varphi_2(n+1)] + Q(n)[C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n)] =$$

$$= C_1[\varphi_1(n+2) + P(n)\varphi_1(n+1) + Q(n)\varphi_1(n)] + C_2[\varphi_2(n+2) + P(n)\varphi_2(n+1) + Q(n)\varphi_2(n)] = 0,$$

бидејќи според претпоставката $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ се партикуларни решенија.

Партикуларните решенија $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ на диференцна равенка од втор ред се **линеарно независни** ако е задоволен условот

$$\varphi_1(n)\varphi_2(n+1) - \varphi_1(n+1)\varphi_2(n) \neq 0.$$

Во литературата понекогаш наместо терминот линеарна независност на решенија, се среќава и терминот пропорционалност на решенијата со идентично значење.

Имено, двете решенија се **пропорционални** ако важи

$$\varphi_1(0):\varphi_2(0) = \varphi_1(1):\varphi_2(1).$$

Во спротивен случај тие се **непропорционални**.

Може да се покаже дека во овој случај непропорционалноста и линеарната независност се поклопуваат.

ТЕОРЕМА 3. Нека е дадена хомогена линеарна диференцна равенка од II ред од вид:

$$f(n+2) + P(n)f(n+1) + Q(n)f(n) = 0 , \qquad (3.2)$$

и нека $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ се две ненулти партикуларни решенија, линеарно независни меѓу себе. Тогаш општото решение на равенката (според изложеното својство) ќе биде од облик:

$$f(n) = C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n),$$

каде C_1 и C_2 се произволни константи.

ТЕОРЕМА 4. Нека е дадена нехомогена линеарна диференцна равенка од II ред:

$$f(n+2) + P(n)f(n+1) + Q(n)f(n) = R(n)$$

и нека $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ се две ненулти линеарно независни партикуларни решенија на соодветната хомогена равенка, а $f^*(n)$ е едно партикуларно решение на дадената нехомогена равенка. Тогаш општото решение на равенката е дадено со формулата:

$$f(n) = C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n) + f^*(n).$$

Последните две теореми се од фундаментална важност за линеарните диференцни равенки. Овде ќе разгледаме еден специјален вид линеарни диференцни равенки кај кои коефициентите $P(n)$ и $Q(n)$ не се функции туку константи. Значи диференцната равенка од вид:

$$f(n+2) + a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = 0,\ a_1, a_2 \in \boldsymbol{R} \qquad (3.3)$$

се вика **линеарна хомогена диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти**, бидејќи a_1 и a_2 се константи кои не зависат од *n*. Равенката, пак,

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0, \qquad (3.4)$$

се вика **карактеристична равенка** за равенката (3. 3) и нејзините корени се од исклучителна важност по решенијата на равенката (3. 3).

ТЕОРЕМА 5. Нека е дадена линеарна хомогена диференцна равенка со константни коефициенти од втор ред од вид:

$$f(n+2) + a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = 0,\ a_1, a_2 \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Тогаш општото решение на равенката има различен облик во зависност од решенијата r_1 и r_2 на нејзината карактеристична равенка и тоа:

$$f(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n, \qquad \text{за } r_1 \neq 0 \neq r_2 \in \boldsymbol{R} \qquad (3.5)$$

$$f(n) = C_1 r_1^n + C_2 n r_2^n, \qquad \text{за } r_1 = r_2\ (\neq 0) \in \boldsymbol{R} \qquad (3.6)$$

$$f(n) = C_1 \rho^n cos n\varphi + C_2 \rho^n sin n\varphi, \qquad (3.7)$$

кога карактеристичната равенка има конјугирано комплексни корени $r_1 = \rho(cos\varphi + i sin\varphi)$ и $r_2 = \rho(cos\varphi - i sin\varphi)$ запишани во тригонометриски вид.

При тоа C_1 и C_2 се произволни константи.

ДОКАЗ*. Да претпоставиме дека равенката има ненулто решение од вид $f(n) = k^n$, за некој број *k*. Со замена во равенката се добива равенството

$$k^{n+2} + a_1 k^{n+1} + a_2 k^n = 0,$$

односно равенката:

$$k^n (k^2 + a_1 k + a_2) = 0.$$

Од последното може да се заклучи дека неопределениот број k треба да биде корен на соодветната карактеристична равенка, за функцијата од видот $f(n) = k^n$ да биде решение на зададената равенка. При тоа се можни три случаи: карактеристичната равенка да има два ненулти реални и различни корени, да има два ненулти еднакви корени, и да има два комплексни корени (кои се конјугирани еден на друг). Случајот $k^n = 0$ го напуштаме бидејќи тогаш $f(n)=0$, а бараме ненулти партикуларни решенија.

Нека карактеристичната равенка има два ненулти реални и различни корени r_1 и r_2.Тогаш $\varphi_1(n) = r_1^n$ и $\varphi_2(n) = r_2^n$ се две ненулти партикуларни решенија. Со оглед на тоа што изразот

$$\varphi_1(n)\varphi_2(n+1) - \varphi_1(n+1)\varphi_2(n) \equiv r_1^n r_2^{n+1} - r_1^{n+1} r_2^n \equiv (r_1 r_2)^n (r_1 - r_2),$$

е различен од нула за секое n, заклучуваме дека тие решенија се и линеарно независни. Значи општото решение ќе биде дадено со формулата (3. 5) .

Сега нека $r_1 = r_2 (\neq 0)$. Тогаш освен функцијата $\varphi_1(n) = r_1^n$, решение е и функцијата $\varphi_2(n) = n r_1^n$. Навистина, со директна замена во равенката се добива $(n+2) r_1^{n+2} + a_1 (n+1) r_1^{n+1} + a_2 n r_1^n = 0$, односно $n(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2) + 2r_1^2 + a_1 r_1 = 0$, бидејќи $r_1 = (-a_1)/2$ е ненулти корен на карактеристичната равенка. Од

$$\varphi_1(n)\varphi_2(n+1) - \varphi_1(n+1)\varphi_2(n) \equiv r_1^n (n+1) r_1^{n+1} - r_1^{n+1} n r_1^n \equiv r_1^{2n+1},$$

што е различно од нула за секое n, заклучуваме дека тие решенија се линеарно независни. Според тоа општото решение ќе биде дадено преку формулата (3. 6).

Нека $r_1 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *и* $r_2 = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ се решенијата на придружената карактеристична равенка на диференцната равенка и да претпоставиме дека константите C_1 и C_2 во општото решение можат да бидат и комплексни броеви. Бидејќи и во овој случај $r_1 \neq r_2$, општото решение можеме да го запишеме во облик:

$$f(n) = C_1^* r_1^n + C_2^* r_2^n \equiv$$
$$C_1^* \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) + C_2^* \rho^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

При изведувањето е искористена Моаврова формула за степенување на комплексен број зададен во тригонометриска форма, која гласи :

$$[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)\ ,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Со мала трансформација, за општото решение на диференцната равенка во овој случај ќе се добие формулата (3. 7) во која $C_1 = C_1^* + C_2^*$ и $C_2 = i\,(C_1 - C_2)$.

Забележуваме дека во општото решение на диферецните равенки од втор ред се појавуваат две произволни константи, за разлика од диференцните равенки од прв ред каде се јавуваше само една. Затоа кај нив се потребни два почетни услова за да добивање на партикуларно решение.

ПРИМЕР 3.1. Да се определи решението на диференцната равенка $f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$, кое ги задоволува почетните услови $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$.

РЕШЕНИЕ: Корените на карактеристичната равенка на поставената диференцна равенка $r^2 = 3r - 2$ се 2 и 1, реални броеви, различни помеѓу себе.Според формулата (3. 5) општото решение ќе биде:

$$f(n) = C_1 2^n + C_2 1^n\,.$$

Константите C_1 и C_2 се определуваат соодветно почетните услови. Во конкретниот случај, решавајќи го системот од линеарни равенки со две непознати кој се добива со замена на вредностите од почетните услови:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

се добива решението $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ односно и бараното партикуларно решение на зададената диференцна равенка:

$$f(n) = 2^n - 1\,.$$

ПРИМЕР 3.2. Да се одреди решението на диференцната равенка $f(n+2) = 4f(n+1) - 4f(n)$, кое ги задоволува условите $f(0) = 1$, $f(1) = 4$.

РЕШЕНИЕ: Карактеристичната квадратна равенка која и се придружува на диференцната равенка е равенката $r^2 = 4r - 4$ која има двојно реално решение (корен) 2. Општото решение на диференцната равенка ќе биде од облик (формула (3. 6)):

$$f(n) = C_1 2^n + C_2\, n2^n$$

а со замена на почетните услови и решавање на така добиениот систем од две линеарни равенки со две непознати, (C_1 и C_2), се добива и партикуларното решение на равенката:

$$f(n) = 2^n + n2^n$$

ПРИМЕР 3.3. Да се најде општото решение на диференцната равенка:

$$f(n+2) = 2f(n+1) - 2f(n).$$

РЕШЕНИЕ: Карактеристичната равенка на диференцната равенка за корени го има парот конјугирано комплексните броеви: $1- i$ и $1+ i$, кои ја имаат следната тригонометриска форма:

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}) \quad \text{и} \quad 1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$$

Соодветно теоремата 5, општото решение на зададената диференцна равенка има облик:

$$f(n)=2^{\frac{n}{2}}\left(C_1\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+C_2\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

Константите C_1 и C_2 се определуваат еднозначно при зададени почетни услови на "рекурентниот процес" зададен со диференцната равенка.

ПРИМЕР 3.4 . Да се најде решение на диференцната равенка $f(n+2) + f(n+1) - f(n) = 0$, кое ги задоволува условите $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. (Фибоначиеви броеви).

РЕШЕНИЕ: Карактеристичната квадратна равенка која и се придружува на диференцната равенка е равенката $r^2 - r - 1 = 0$, има две реални и различни решенија (корени) $r_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Општото решение на диференцната равенка ќе биде од облик (формула 2.2.6):

$$f(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Од почетните услови се добива системот: $C_1 + C_2 = 0$, $C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1$ од каде $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Според тоа се добива решението:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

Забелешка: За истата равенка со други почетни услови $f(0) = 1$, $f(1) = 3$ се добиваат броевите на Лукас.

Ќе разгледаме една класа линеарни нехомогени диференцни равенки од втор ред со константни коефициенти. Нека е дадена диференцна равенка од вид:

$$f(n+2) + a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = R(n),$$

каде $a_1, a_2 \in \boldsymbol{R}$ се константи, а $R(n) \neq 0$, дадена функција.

Во согласност со Теоремите 4. и 5. решавањето на оваа диференцна равенка се сведува на наоѓање на едно нејзино партикуларно решение. Покажано е дека во зависност од видот на функцијата $R(n)$, може да се претпостави и видот на самото партикуларно решение. Без докажување ќе наведеме неколку такви врски.

1^0. Нека $R(n)$ е полином од степен m. Тогаш возможни се следните видови на партикуларното решение $f^*(n)$:

a) $f^*(n) = A_0 + A_1 n + ... + A_m n^m$

ако 1 не е корен на карактеристичната равенка $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$;

б) $f^*(n) = A_0 n + A_1 n^2 + ... + A_{m-1} n^m + A_m n^{m+1}$
ако 1 е еден од различните корени на карактеристичната равенка;

в) $f^*(n) = A_0 n^2 + A_1 n^3 + ... + A_m n^{m+2}$
ако 1 е двоен корен на карактеристичната равенка.

2^0. Нека $R(n) = P_m(n) e^{\alpha n}$, каде $P_m(n)$ е полином од степен m. Тогаш $f^*(n)$ ќе го има еден од следните видови:

$$f^*(n) = (A_0 + A_1 n + ... + A_m n^m)\, e^{\alpha n}\ ;$$
$$f^*(n) = (A_0 n + A_1 n^2 + ... + A_{m-1} n^m + A_m n^{m+1})\, e^{\alpha n}\ ;$$
$$f^*(n) = (A_0 n^2 + A_1 n^3 + ... + A_m m^{m+2})\, e^{\alpha n}\ ;$$

во зависност од тоа дали α — не е, е еден, или е двоен корен на карактеристичната равенка соодветно.

3^0. Нека $R(n) = P_m(n) a^n$, каде $P_m(n)$ е полином од степен m. Тогаш $f^*(n)$ ке го има еден од следните видови:

$$f^*(n) = (A_0 + A_1 n + ... + A_m n^m)\, a^n\ ;$$
$$f^*(n) = (A_0 n + A_1 n^2 + ... + A_{m-1} n^m + A_m n^{m+1})\, a^n\ ;$$
$$f^*(n) = (A_0 n^2 + A_1 n^3 + ... + A_m n^{m+2})\, a^n\ ;$$

во зависност од тоа дали a — не е, е еден, или е двоен корен на карактеристичната равенка соодветно.

Во сите случаи A_0, A_1,..., A_m се неопределени коефициенти кои накнадно се наоѓаат по замената на партикуларното решение во самата равенка. При тоа се користи правилото дека два полиноми се еднакви ако се еднакви коефициентите пред соодветните степени.

ПРИМЕР 3.5. Да се реши нехомогената диференцна равенка

$$f(n+2) + f(n+1) - f(n) = n - 1.$$

РЕШЕНИЕ: Општото решение $f_h(n)$ на соодветната хомогена диференцна равенка се добива во согласност со Теорема 5:

$$f_h(n) = C_1\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n + C_2(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$$

Бидејќи десната страна $R(n) = n - 1$ е полином од прв степен и 1 не е корен на карактеристичната равенка, партикуларното решение ќе го бараме во вид на полином од прв степен т.е. $f^*(n) = A_0 + A_1 n$. Со директна замена во равенката ќе добиеме:

$$A_1(n+2) + A_0 + A_1(n+1) + A_0 - A_1 n - A_0 = n - 1,$$

од каде после средувањето и изедначувањето на коефициентите пред соодветните степени се добива системот равенки $A_1 = 1$, $3A_1 + A_0 = -1$, чие решение е $A_0 = -4$, и $A_1 = 1$. Значи општото решение на нехомогената диференцна равенка ке биде дадено со формулата:

$$f(n) = C_1\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n + C_2(-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n + n - 4$$

ПРИМЕР 3.6. Да се реши нехомогената диференцна равенка

$$f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = n^2.$$

РЕШЕНИЕ: Општото решение на соодветната хомогена равенка ќе биде дадено со $f_h(n)=C_1+C_2 n$. Бидејќи $R(n)=n^2$ е полином од втор степен, а 1 е двоен корен на карактеристичната равенка, партикуларното решение ќе го бараме од вид $f^*(n) = A_0 n^2 + A_1 n^3 + A_2 n^4$. Со замена во равенката и по изедначување на коефициентите пред соодветните степени, се добива системот $12A_1 = 1$, $6A_1 + 24A_2 = 0$, $2A_0 + 6A_1 + 14A_2 = 0$. Системот има решение $A_2 = \frac{1}{12}$, $A_1 = -\frac{1}{3}$, $A_0 = \frac{5}{12}$, и општото решение на нехомогената равенка ќе биде дадено со формулата:

$$f(n) = C_1 + C_2 n + \frac{5}{12}n^2 - \frac{1}{3}n + \frac{1}{12}.$$

ЗАБЕЛЕШКА: Нека е дадена линеарна нехомогена диференцна равенка од втор ред од вид $f(n+2) + P(n)f(n+1) + Q(n)f(n) = R(n)$, и нека се познати две линеарно независни решенија $\varphi_1(n)$ и $\varphi_2(n)$ на соодветната хомогена диференцна равенка $f(n+2) + P(n)f(n+1) + Q(n)f(n) = 0$, чие општо решение ќе биде дадено со формулата $f_h(n) = C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n)$, при што коефициентите $P(n)$ и $Q(n)$ се дадени функции (не се константи). Со Лагранжовиот метод на варијација на константите, кој веќе го користевме во доказот на Теорема 2., секогаш може да се најде општото решение на нехомогената равенка. На тој начин за партикуларното решение се добива општата формула:

$$f^{*}(n)=\sum_{t=0}^{n-1}\frac{\varphi_1(t+1)\varphi_2(n)-\varphi_2(t+1)\varphi_1(n)}{\varphi_1(t+1)\varphi_2(t+2)-\varphi_2(t+1)\varphi_1(t+2)}R(t).$$

Во 2. е разгледана класата линеарни хомогени диференцни равенки од втор ред со константни коефициенти. Начинот на решавање на оваа класа може да се прошири и за линеарни диференцни равенки со константни коефициенти од ред повисок од два. Единствен проблем при тоа е решавањето на соодветната карактеристична равенка која ќе биде од степен поголем од два како и класификацијата на нејзините корени.

4. Системи диференцни равенки

Кај обичните равенки се разгледуваат и системи равенки. Во тој случај наместо решенијата на една равенка, ги бараме оние решенија што едновремено ги задоволуваат сите равенки од системот. Во практиката сме се сретнале со вакви системи, како на пример со линеарен систем од две равенки од вид:

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\3x-y+6=0\end{cases}$$

каде x и y се непознатите по кои системот се решава. Конкретно овој систем може да се реши, т.е. со помош на различни методи може да се најдат броеви кои заменети на местата на x и y и во двете равенки да дадат точно бројно равенство (идентитет), како на пример со помош на методот на замена или методот на елиминација. За решение на овој систем се добива парот броеви $x = -1$, $y = 3$.

Да разгледаме сега еден систем од две линеарни диференцни равенки од прв ред од вид:

$$\begin{cases}f(n+1)=pf(n)+qg(n)\\g(n+1)=rf(n)+sg(n)\end{cases}$$

каде f и g се непознати функции, а p, q, r и s се константи. Нека барем една од константите q и r е различна од нула (ако се двете истовремено нули системот се распаѓа на две диференцни равенки од прв ред со константни коефициенти независни една од друга). Тогаш, во случај $q \neq 0$, ја множиме втората равенка со q и добиваме:

$$\begin{cases} qg(x) = f(x+1) - pf(x) \\ qg(x+1) = qrf(x) + sqg(x) \end{cases}$$

Од првата равенка се добива $qg(n+1) = f(n+2) - pf(n+1)$, што се искористува за изедначување во втората равенка, за на крајот, по низа трансформации, да се добие линеарна хомогена диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти :

$$f(n+2) = (p+s)f(n+1) + (qr-ps)f(n),$$

со чие решавање според теорема 5 се добива едната функција од парот решенија. Втората функција лесно се добива од релацијата

$$g(n) = \frac{f(n+1) - pf(n)}{q}.$$

Да забележиме дека во случајот на системи диференцни равенки решенија не се пар броеви туку пар функции односно пар низи.

ПРИМЕР 4.1. Да се одреди решението на системот диференцни равенки:

$$\begin{cases} f(n+1) = 3f(n) + g(n) \\ g(n+1) = 5f(n) - g(n) \end{cases}$$

кое ги задоволува почетните услови $f(0) = 0$ и $g(0) = 6$.

РЕШЕНИЕ:

Од првата равенка добиваме дека $g(n) = f(n+1) - 3f(n)$. Со замена на $g(n)$ и $g(n+1)$ во втората равенка, се добива $f(n+2) - 3f(n+1) = 5f(n) - f(n+1) + 3f(n)$ што е еквивалентно со $f(n+2) = 2f(n+1) + 8f(n)$.

Општото решение на оваа равенка според формулата (3. 5) е $f(n) = C_1 4^n + C_2(-2)^n$, бидејќи соодветната каракетристична равенка $r^2 - 2r - 8 = 0$ има корени 4 и –2.

Вториот услов за определување на константите C_1 и C_2 се добива од првата равенка на системот: $f(1) = 3f(0) + g(0) = 6$. Од равенките $C_1 4^0 + C_2(-2)^0 = 0$, и $C_1 4^1 + C_2(-2)^1 = 6$, се добива $C_1 = 1$ и $C_2 = -1$, и едното решение ќе биде $f(n) = 4^n - (-2)^n$. Другото решение ќе биде $g(n) = 4^n + 5(-2)^n$.

ПРИМЕР 4.2. Да се најде партикуларното решение на системот диференцни равенки

$$\begin{cases} f(n+1) = 2f(n) - g(n) \\ g(n+1) = f(n) + 4g(n) \end{cases}$$

кое се добива за почетните услови $f(0) = 2$ и $g(0) = 1$.

РЕШЕНИЕ: Од првата равенка се добива $g(n) = 2f(n) - f(n+1)$ па со соодветни замени во втората равенка наместо $g(n+1)$ и $g(n)$, се добива: $2f(n+1) - f(n+2) = f(n) + 4(2f(n) - f(n+1))$ односно $f(n+2) = 10f(n+1) - 9f(n)$ која за партикуларно решение ја има функцијата $f(n) = 2\cdot 3^n - n\cdot 3^n$, а соодветно замените ќе ја добиеме и $g(n) = 3^n (1 + n)$.