ФРАКТАЛИ

Во оваа статија е обработена темата фрактали како дел од теоријата на хаос, што претставуваат фракталите, нивни карактеристики и поделба според начинот на кој се генерираат истите.

Така почнувајќи со општите дефиниции за фрактали и тоа дека тие претставуваат успешен обид математички да се манифестира хаосот, со помош на веќе познати и лесни математички модели, започнува првиот дел од темата. Во него покрај тоа се наведени и главните карактеристики на фракталите, за да конечно преку краток осврт на некои математички поими и дефиниции се дефинира и поимот фрактал. Потоа преку канторовата прашина се доаѓа до конкретни примери за фрактали и конечно каква е поделбата на фракталите според начинот на кој тие настанале.

За суштинско дефинирање на поимот фрактал се потребни некои основни познавања на елементи од линеарна алгебра, матрици, линеарни оператори, матрични линеарни трансформации.

Поради геометриска прегледност овде ќе се задржиме само во Евклидовата рамнина R^2.

Поими:
– **Линеарна трансформација**
– **Множества слични сами на себе**
– **Хауздорфова димензија**
– **Фрактал**
– **Хаос**

ЛИНЕАРНА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Да го поставиме проблемот за пресликување на точки од рамнина во точки од друга рамнина. Нека во R^2 со Декартов правоаголен координатен систем е дефинирано пресликување на точка во точка со веќе познато покоординатно собирање и множење со скалар. Ако A е множество точки, а T е линеарно пресликување тогаш ќе пишуваме $T(A) = B$, каде со B го означуваме множеството точки добиени при линеарното пресликување или линеарниот оператор T .

Кај специјалните линеарни оператори за кои постои реален број $s > 0$ така што T: $(x, y) \to s\ (x, y) = (sx, sy)$ во R^2 се среќаваме и со фактор на дилатација ако $s > 1$ односно контракција ако $0 < s < 1$.

Дефиниција: Две подмножества S_1 и S_2 од точки од Евклидовата рамнина велиме дека се конгруентни ако постои линеарно пресликување T со фактор s така што $T(S_1) = sS_1 = S_2$.

При тоа $S_1 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$, $sS_1 = \{(sx, sy) \mid (x, y) \in S_1\} = S_2$ и дозволена е и композиција со транслација.

Линеарното пресликување (операторот) T од Евклидовиот простор R^2 во R^2, со одредени особини кое дефинира соодветна линеарна трансформација, генерира множества наречени фрактали. При тоа се среќаваат и математичките поими затворено и ограничено множество, конгруентни множества, дисјуктни множества, модуларна аритметика.

Фракталите се генерираат со помош на линеарни трансформации.

За таа цел се употребува соодветна матрична презентација на тие линеарни пресликувања (трансформации) односно оператори. Овие матрични презентации ќе ги објасниме најпрвин подетално со поедноставни примери.

Например со матрицата $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ е презентирано пресликување на точките од R^2 во R^2 симетрично на y оската, т.е

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix},$$

каде координатите на точките се елементи од матрица колона.

На пресликувањето ротација за агол φ одговара матрицата

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Значи

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{bmatrix}$$

а на пресликувањето дилатација или контракција со фактор s матрицата

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

т.е.

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx \\ sy \end{bmatrix}.$$

Постојат и линеарни трансформации наречени контракции или издолжувања во однос на x односно y оската, дефинирани со матриците од вид

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ односно } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \text{ или заедно } \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}.$$

Пресликувањето T дефинирано со

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = s\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

е композиција од три едноставни пресликувања контракција со фактор s, ротација за агол φ и транслација. Оваа пресликување се вика сличност со фактор s и при тоа пресликување оригиналот и сликата како множества се конгруентни.

МНОЖЕСТВА СЛИЧНИ САМИ НА СЕБЕ

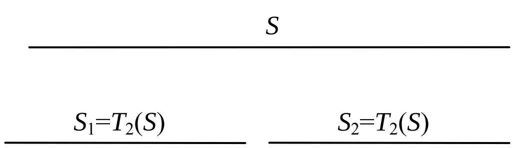
Дефиниција: Затворено и ограничено множество S од точки од Евклидовата рамнина односно простор велиме дека е слично само на себе (self–similar) ако е унија од k дисјуктни подмножества S_1, S_2, …., S_k кои се конгруентни со S, добиени со ист фактор на контракција s, $0 < s < 1$. (самобендисано множество)

Пример 1. : Отсечка S со должина 1 . Нека $x \in S$. Со трансформациите

$T_1(x) = \frac{1}{2}x$ за множеството $S_1 = T_1(S)$,

$T_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ за множеството $S_2 = T_2(S)$,

се добива $S = S_1 \cup S_2$ (цртеж 1.).



Цртеж 1.

Значи отсечката S е множество слично само на себе, конгруентно со множествата S_1 и S_2 со ист фактор на контракција 1/2.

Пример 2. : Квадрат U со страна со должина 1. Нека точката $A(x, y) \in U$. Со трансформациите

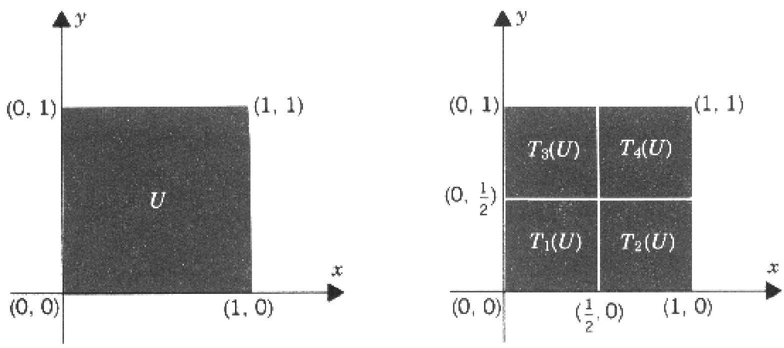
$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix} \text{ за множеството } S_1 = T_1(U),$$

$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix} \text{ за } S_2 = T_2(U),$$

$$T_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ за } S_3 = T_3(U),$$

$$T_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{y}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ за } S_4 = T_4(U),$$

се добива $U = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$. При тоа точката A е претставена со матрица колона.



Цртеж 2.

Значи квадратот U е множество слично само на себе, конгруентно со сите множества S_1, S_2, S_3, S_4 со ист фактор на контракција 1/2 (цртеж 2.).

ФРАКТАЛ

Фракталите од секогаш биле околу нас, но поимот фрактал и неговата дефиниција се познати од неодамна. Зборот фрактал го вовел Benoit Mandelbrot, од латинската придавка *fractus*, што значи раздробен, скршен неповрзан. Со тоа сакал да ја претстави раздробеноста и “фракционалноста” т.е. геометријата која се фокусира на раздробени, искривени и неравни облици. Во својата книга "Fractal Geometry of Nature"(1983), го изнел тврдењето дека необичните облици имаат значење и дека сложеноста не е така случајна. Со откривањето на фракталната геометрија ни е овозможено да влеземе во нов свет на облици и да почнеме да размислуваме на поинаков начин.

Има многу различни дефиниции за фрактал, но ниту една не е доволно прецизна. Меѓутоа, важни се две својства кои ги поседуваат сите фрактали, а тоа се фрактална димензија и самосличност. Ќе наведеме некои дефиниции за фрактал:

- фрактал е нерамен или искршен геометриски облик кој може да се подели на уште поситни делови, од кои секој (барем приближно) е смалена копија од целината
- фрактал е секој примерок кој при зголемување открива поголема сложеност
- фракталот како геометриски облик е сличен сам на себе во различни мерки, итн.

Фракталите се слики на настанување и исчезнување на појави и објекти, ја опишуваат грубоста на светот, неговата енергија, динамички промени и трансформации, додека трагите кои остануваат по поминувањето на динамичките активности ги бележи фракталната геометрија.

Постојат многу математички објекти кои се фрактали. На пример: Канторово множество, килим и триаголник на Sierpinski, Koch-ова снегулка, крива на Paeano, Mandelbrot-ово множество, Lorenc-ов фрактал на привлечност итн. Во фрактали вбројуваме и многу вистински облици како облак, планина, морски брег, паднати листови и др.

Во Euclid-овата или тополошка геометрија се среќаваме со објекти кои имаат целобројни димензии Димензија на просторот во кој живееме е три, рамнината односно површината има димензија два, кривата еден, а точката нула. Меѓутоа објектите во природата немаат правилен облик, на пр. нити облаците се топки, нити планините столбови или пирамиди. Таквите објекти чија димензија не мора нужно да биде цел број ги викаме фрактали, а нивната димензија ја нарекуваме фрактална или искршена димензија. Таа го дефинира раздробениот состав, но исто така и исполнетоста на просторот т.е. степенот на завземање на просторот помеѓу Euclid-овите димензии. Суштината е во тоа степенот на неправилност (фракталната димензија) да остане постојан без оглед на мерката, што во природата често се покажува како точно.

Во 1919 година Hausdorff (1868–1942) формулирал друга дефиниција за димензија како бројна карактеристика за множество. Овде таа општа дефиниција нема да ја кажеме поради нејзината сложеност но ќе ја конкретизираме на поедноставните множества слични сами на себе.

Дефиниција: Нека S е множество слично само на себе. Бројот

$$d_H(S) = \frac{\ln k}{\ln \frac{1}{s}}$$

каде k е бројот на дисјунктни множества со ист фактор на контракција s чија унија е S се вика Хаусдорфова димензија за S со ознака $d_H(S)$.

Вака дефинираната Хауздорфова димензија не мора да биде цел број, не мора да е еднаква на тополошката димензија за исто множество S со ознака $d_T(S)$, и секогаш важи $d_T(S) \leq d_H(S)$.

За множеството S кај пример 1 се добива $s = \frac{1}{2}$, $k = 2$, $d_H(S) = 1 = d_T(S)$.

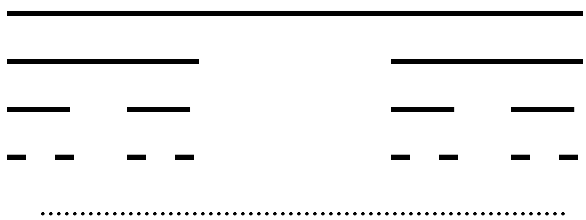
За множеството U кај пример 2 се добива $s = \frac{1}{2}$, $k = 4$, $d_H(U) = \ln 4/\ln 2 = 2 = d_T(U)$.

(Темпирана мега бомба со продолжено дејство 1919 - 1977)

Дефиниција: (Mandelbrot 1977) Фрактал е подмножество од Евклидскиот простор за кое хауздорфовата и тополошката димензија не се еднакви.

Пример 3. (Канторово множество) Канторовото множество S е фрактал и за него Хауздорф (1919) првпат покажал дека има димензија не цел број.

Геометриски гледано ако една отсечка со должина 1 ја поделиме на три еднакви дела и ја одстраниме средната третина, па потоа ја одстраниме средната третина од преостанатите 2 отсечки и така продолжиме до бесконечност, се добива канторовото множество S (цртеж 3.).



Цртеж 3.

Нека $x \in S$. Со трансформациите $T_1(\mathrm{x}) = \frac{1}{3}x$ за множеството $S_1 = T_1(S)$, $T_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ за множеството $S_2 = T_2(S)$, се добива $S = S_1 \cup S_2$ и $s = \frac{1}{3}$, $k = 2$. S е слично само на себе, конгруентно со множествата S_1, S_2 со ист фактор на контракција $s = \frac{1}{3}$. Значи $d_H(S) = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0{,}6309$ и има хауздорфова димензија не цел број т.е. е фрактал.

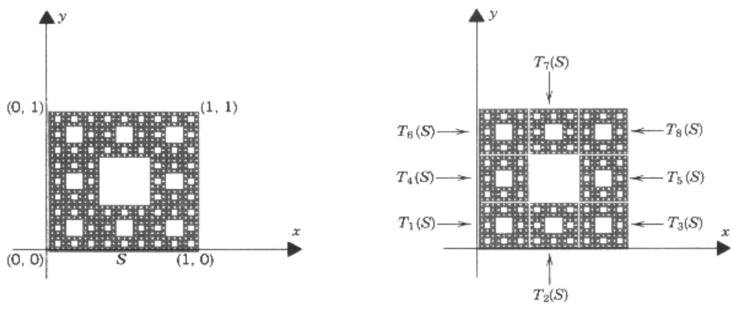
Ова множество се состои од она што ќе остане кога од единечната должина се извадат сите отсечки кои се одстрануваат. За должина на тоа што ќе се одстрани добиваме

$$L = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Според тоа должината како бројна карактеристика на канторовото множество е нула. Сепак, тоа не е само множество од изолирани точки, бидејќи преброиво множество од изолирани точки има димензија нула, додека Канторовото множество има димензија ln2/ln3. Повеќе од само бесконечна колекција на точки оваа "прашина" сепак е помалку од крива, а повеќе од точка. Една друга бројна карактеристика кардиналниот број на оваа множество е еднаков на кардиналниот број на множеството реални броеви кое е непреброиво множество.

Манделброт пронашол и практична примена на Канторовата прашина, препознавајќи во неа модел според кој настанува шумот во дигиталните комуникациски системи. Имено постојат периоди кога трансмисијата низ комуникацискиот канал е без шум, понатаму ако се анализира шумот во него, ќе се препознаат периоди на шум, на секое скалило до бесконечност.

Пример 4. Sierpinski килим (Waclaw Sierpinski 1882 – 1969): Килимот на Sierpinski (1916) е една генерализација на Cantor-овото множество. Се добива со поделба на квадрат на девет еднакви делови и одземање на средишниот од нив со страна 1/3 од појдовната. Истата процедура се повторува на секој од останатите 8 квадрати. Ако оваа постапка се повторува бесконечно многу пати тогаш множеството точки кое ќе се добие е килимот на Сиерпински (цртеж 4.).



Цртеж 4.

Нека точката $A(x, y)$ припаѓа на килимот на Сиерпински. Во согласност со процедурата за добивање на тоа множество се дефинираат следните конгруентни множества:

$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ за множеството $S_1 = T_1(S)$,

$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ за множеството $S_2 = T_2(S)$,

$T_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ за множеството $S_3 = T_3(S)$,

$T_4\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ за множеството $S_4 = T_4(S)$,

$T_5\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ за множеството $S_5 = T_5(S)$,

$T_6\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ за множеството $S_6 = T_6(S)$,

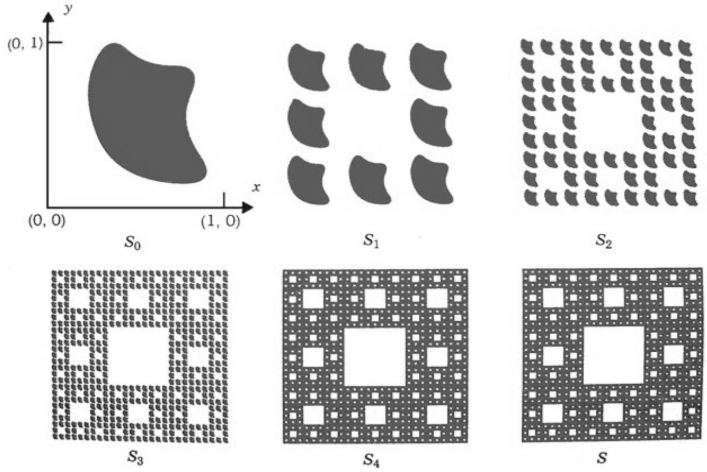
$T_7\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ за множеството $S_7 = T_7(S)$,

$T_8\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ за множеството $S_8 = T_8(S)$

и $S = \bigcup_{i=1}^{8} T_i(S)$. При тоа точката A е претставена со матрица колона. Значи $s = \frac{1}{3}$, $k = 8$. Со тоа покажавме дека оваа множество е слично само на себе, конгруентно со сите множества S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 , со ист фактор на контракција $s = \frac{1}{3}$ и има Хауздорфова димензија $d_H(S) = \frac{\ln 8}{\ln 3}$ = 1,893. Значи килимот на Сиерпински е фрактал.

Воведувањето на поимот фрактал според соодветните примери е направено преку линеарна трансформација дефинирана со едноставна константна матрица. Всушност множеството е дадено и едноставно е покажано дека може да се добие со така дефинираната линеарна трансформација.

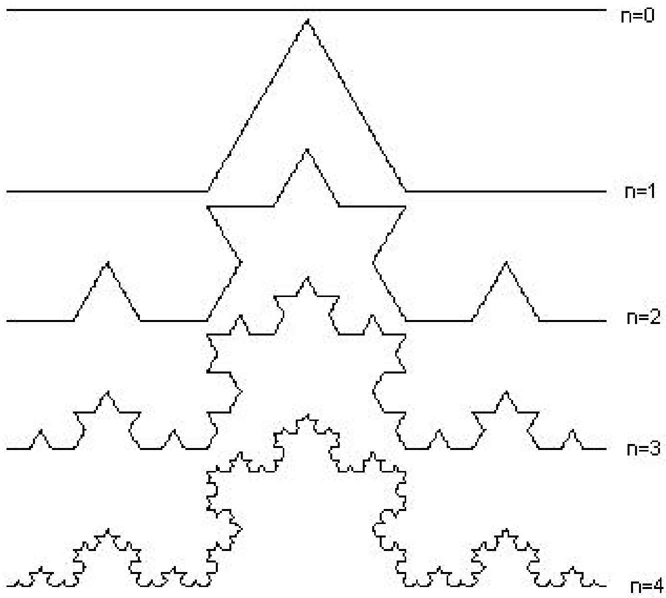
Ако проблемот се постави обратно т.е. ако линеарната трансформација е однапред дадена и е покажано дека генерира множество кое е фрактал, тогаш се поставува прашање како да се добие неговата слика на екран. Фактички прашањето е од кое иницијално множество точки треба да се почне со соодветната трансформација. За среќа тој проблем е разрешен на многу едноставен начин. Имено за иницијално множество е доволно да се земе било кое затворено и ограничено подмножество, например квадрат, и се примени линеарната трансформација која генерира Сиерпински килим. Тогаш веќе после 4 итерации почнува доста јасно да се оформува килимот (цртеж 5.).



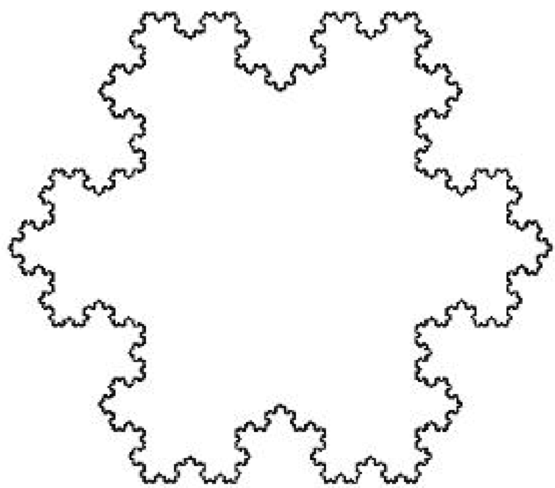
Цртеж 5.

За фракталите зададени со соодветни пресликувања (оператори) се познати соодветни компјутерски програми и со цртање точка по точка се добиваат и нивни слики.

Друг пример на фрактал е Koch-овата крива (1904 г.) која се генерира на сличен начин како и Канторовото множество. Конструкцијата на Koch-овата крива почнува со линија со единечна должина $L(1) = 1$. Фрактална димензија на Koch-овата крива $d_H = \ln 4/\ln 3 \approx 1{,}2628$ (цртеж 6.) .



Цртеж 6. Приказ на конструкција на дел од Koch-ова крива



Цртеж 7. Koch-ова крива Конструкцијата почнува од страните на рамностран триаголник.

Оваа снегулка е повеќе од крива, а помалку од површина (цртеж 7.).

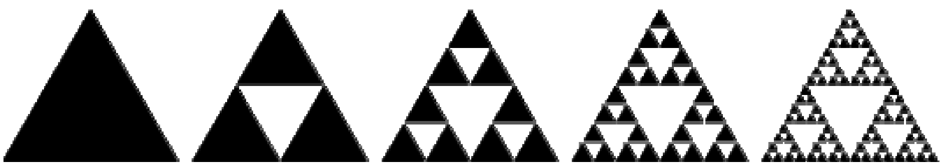
Според начинот на настанување (техниката на генерирање) фракталите можат да бидат:

1. Итеративни фрактали кои поседуваат најголем степен на самосличност т.н. потполна самосличност. Без оглед на тоа кој дел сме го зголемиле секогаш ќе добиеме слика која е идентична на почетната.
2. Рекурзивни фрактали се фрактали кои се добиваат од рекурзивни релации. Тие поседуваат својство на квазисамосличност, што значи дека фракталот е приближно, но не потполно еднаков на различни делови.
3. Случајни (рандом) фрактали поседуваат најмал степен на самосличност т.н. статистичка самосличност. Ги наоѓаме секаде во природата.

Итеративни фрактали се фрактали кои се формираат низ процес на итерации, односно бесконечно повторување на идентични чекори.

Обележје на *итеративните фрактали* е дека секој, колку и да е мал дел дел од фракталот, е идентичен на фракталот од кој сме го издвоиле, без оглед на степенот на зголемување.

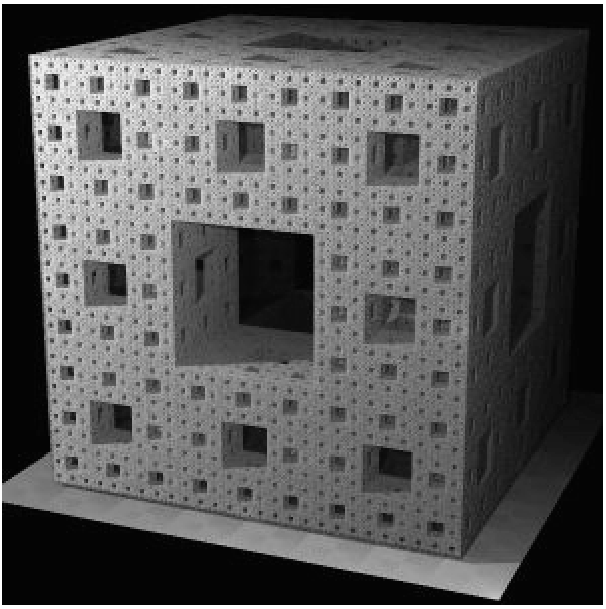
Пример на итеративен фрактал е Sierpinski-иот триаголник. Како и кај Koch-овата снегулка, генераторот е рамностран триаголник (цртеж 8.).



Цртеж 8.

Од рамностран триаголник се одзема повторно рамностран триаголник со страна половина од појдовната. Hausdorff-овата димензија на овој фрактал е $\ln 3 / \ln 2 \approx 1.585$.
Овој фрактал Сиерпински го претставил уште 1916 година.

Menger-овиот сунгер е три-димензионална генерализација на Sierpinsk-иот килим и Cantor-овото множество. Прв пат е опишано од австрискиот математичар Karl Menger и има хауздорфова димензија ln20/ln3 ≈2,7268 (цртеж 9.).



Цртеж 9.

Рекурзивните фрактали се добиваат од математички равенки со итерација (лат. *iterare* - повторува). Секој член од секвенцата на чекори се добива како функција од претходните членови.

Во зависност од сложеноста на линеарните трансформации (например афини трансформации) се добиваат и поопшти и посложени фрактали. Постојат повеќе алгоритми за генерирање фрактали (метод на Монте Карло, 1985 Michael Barnsley, и др.) $S_n = T(S_{n-1})$ со иницијални множества или точки.

Еден од најпознатите рекурзивни фрактали и најсовршен фрактал е Mandelbrot-овото множество кое се изучува како вовед во теоријата на хаосот.

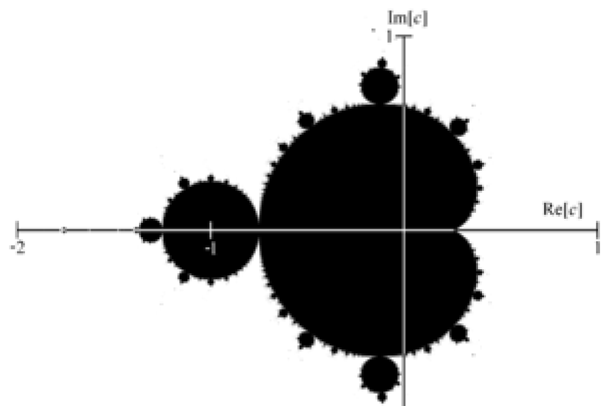
Манделброт (1924 -) својата извонредна интуиција ја покажал не еднаш, непогрешно покажувајќи го патот на развитокот во многу области, од сеизмологијата до кристалографијата, астрофизиката и физиологијата. Неверојатен свет во кој делот е поголем од целината, а секој одвај видлив детал е влез во нов бесконечен универзум. Тој во 1980 година го претставил своето изпитување на последователно квадрирање во комплексната рамнина со равенката:

$$z_{n+1} = z_n^{\ 2} + c \ ,$$

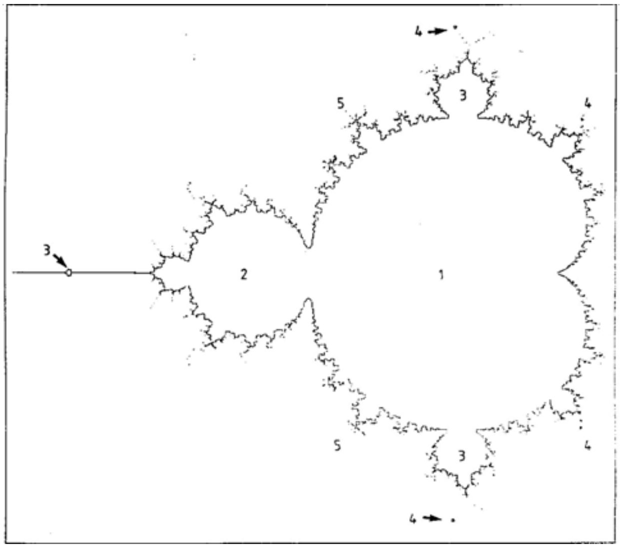
каде z_n и c се комплексни броеви $z_n = x_n + iy_n$, $c = a + ib$. Постапката се состои во тоа што за сите точки кои ја сочинуваат резолуцијата на екранот, првата координата x се заменува со $x^2 - y^2 + a$, а втората координата y со $2xy + b$. Потоа новите x и y се влез за следната итерација.

За да се утврди дали некој број односно точка припаѓа на Манделбротовото множество потребно е да се направат стотина итерации што е возможно само со помош на некоја компјутерска програма.

Ако тие точки ги обоиме со црна боја тогаш тие ја формираат срцеликата форма на множеството. Карактеристичната црна бубачка или кардиоидата е резултат на едноставно повторување на една нелинеарна постапка и е вистински симбол на новата геометрија (цртеж 10.).



Цртеж 10.



Комплексните функции изгледа дека забележително добро се однесуваат кога треба да се креира приказ.

Квадратната функција е екстензивно студирана бидејќи таа е наједноставна и може да се редуцира до форма со една константа. Б.Б.Манделброт е тој кој се досети да ги прошири студиите до комплексна рамнина и кој имал компјутерски помагала расположливи за себе.

Постојат множества кои се фрактали и чија хауздорфова димензија е цел број. Кај нив тополошката и хауздорфовата димензија не се еднакви.

Со зголемување на било која точка од фракталната структура добиваме нови нивоа со нови светови, кои се слични, но чии детали не мора да се поклопуваат со соодветните од други нивоа. Овој вид симетрија непознат е во линеарниот свет и го нарекуваме дилатациона симетрија.

Случајните фрактали се резултат на динамички активности кои секојдневно се случуваат во природата. Голем број објекти во природата покажуваат фрактална структура како например облаците на небото, крошната на дрвото, снегулките, планините, речните сливови, брокулата, карфиолот, системи крвни садови, отпаднати лисја и др.

На крај да нагласиме и дека посебна магичност се добива со фрактали во боја како уметнички слики.

ХАОС - вовед

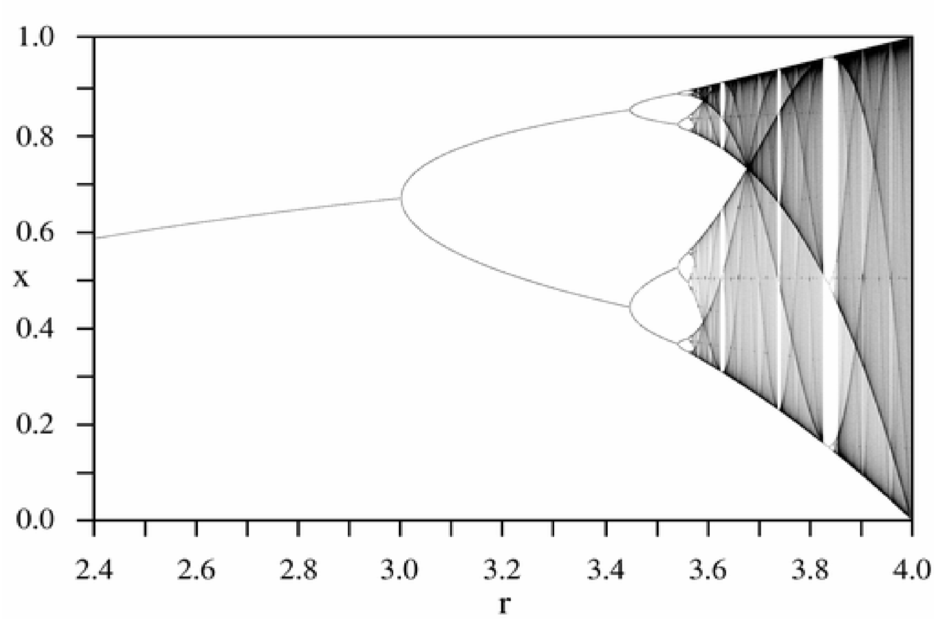
Прв пат името хаос е употребено 1975 (Tien–Yien Li, James Yorke) со намера односно обид да се дефинира некоја законитост. До тогаш многу природни феномени биле регистрирани и третирани како појави кои не подлежат на некоја законитост. Такви се например тектонските движења, ерозијата како процес, климата и други кои се разгледувале како хаотични ситуации без некоја законитост во нив и можност за предвидување. Сепак тие останувале во некои граници и постојано имало обиди да се воочат и формулираат некои законитости со цел за дефинирање на некои методи за претскажување. Можеби еден ден и тоа ќе се реализира.

Фракталите се еден парцијален успешен обид во таа насока, благодарение на веќе изградена математичка теорија со дополнителни дефинирања на поими како што се атрактори, стабилна состојба, бифуркации, хаотично однесување, секако заедно со експериментите и теоријата на итерации, итеративните методи и процеси со соодветни алгоритми. Во повеќе ситуации за кои се мислело дека неможат да се окарактеризират соодветни состојби е постигнат напредок благодарение на компјутерите кои можат да обработат огромна количина податоци и да го дадат излезот како крива или слика на мониторот или печатачот.

Прирастот на популацијата на Земјата не може да продолжи засекогаш. Ограничувањето во природната средина, снабдувањето со храна или други основни потреби конечно ќе ја сопрат експанзијата. Оваа ситуација доби математичка форма во 1845 год. од Pierre François Verhulst, земајќи ги во предвид ограничувачките фактори како снабдување со храна или болести и двата вообичаени ефекти:

- репродукција значи дека популацијата ќе се зголемува со стапка пропорционална на моменталната популација.
- умирање од глад значи дека популацијата ќе се намали со стапка пропорционална на вредноста добиена со земање на теоретски “носечкиот капацитет” на средината намален за моменталната популација.

Математички ова може да се напише со равенката $x_{n+1} = r\, x_n\, (1 - x_n)$ каде x_n претставува популација во n-та година, и од тука x_0 претставува почетна популација, r е позитивен број и претставува комбиниран соодност за репродукција и умирање од глад.



Цртеж 11.

Оваа слика (цртеж 11.) ја илустрира динамиката на Verhulst-овата равенка (бифуркациски дијаграм). Хоризонталната оска ги прикажува вредностите на параметарот r додека вертикалната оска ги прикажува можните долготрајни вредности на x. Овој цртеж е добиен со земање на вредноста на r и итерирање за 5000 години за да се дозволи системот самиот да се ослободи од почетните привремени вредности.

Бифуркацискиот дијаграм е фрактал: ако се зумира вредноста $r = 3.82$ и се фокусираме на еден остров на стабилност од трите, ситуацијата во близината изгледа како собрана и благо дисторзирана верзија на целиот дијаграм. Истото е точно за сите нехаотични точки. Ова е пример на длабока и секаде присутна врска меѓу хаосот и фракталите.

Покрај кај динамиката на популацијата, Verhulst-овата равенка може да се примени кај некои аспекти од турбуленцијата и хемиските динамики. Едно нешто се појавува во речиси сите случаи, дека хаосот се појавува во регион каде се среќаваат два конфликтни процеса.

Ќе биде очигледно дека за да се произведе хаотично однесување основна е нелинеарна функција. Линеарна би се движела порамно и континуирано во една насока кон нула или бесконечност.

Дефинирањето на хаотично непрекинато пресликување е дадено од L.Devaney во 1986 година, но постојат и други дефиниции.

Нека непрекинатото пресликување T на множество S во самото себе е хаотично. Ако точките од S ги разгледуваме како иницијално множество од состојби тогаш со пресликувањето се добиваат нови состојби (промена во зависност од време и сл.)

Со хаотичните пресликувања (трансформации) почнуваат веќе да се проучуваат со успех хемиски, еколошки некои аспекти на турбуленцијата, електрични, електромагнетни, телекомуникациски, биолошки, економски демографски и слични феномени преточени во динамички системи. Тоа е теоријата на итерации и значи хаос не е хаос.