# КАРДАНОВИ ФОРМУЛИ

Под алгебарско решавање на равенката :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (1)$$

каде $a_0$ , $a_1$ , $a_2$ , ..., $a_{n-1}$ , $a_n$ се реални броеви и $n$ природен број, се подразбира определување на корените на равенката со конечен број операции собирање одземање, множење, делење и коренување со коренов показател природен број , од нејзините коефициенти. Според основната теорема на алгебрата секоја равенка од $n$- ти степен од вид (1) има најмногу $n$ корени.

Во наставата по математика е позната формулата за решавање на квадратна равенка додека за алгебарско решавање на равенки од повисок степен се разгледуваат само специјални случаи.

Равенката од трет степен прв ја решил италијанскиот математичар Scipione del Ferro во 1515 година. Потоа решението било повторно откриено од италијанските математичари Nikolaus Tartaglia во 1535 година и Geronimo Cardano во 1545 година.

## Решавање на равенки од третти степен

Најпрвин ќе разгледаме некои специјални равенски од трет степен. Непотполната кубна равенка $x^3 = A$, со смената $x = y\sqrt[3]{A}$, каде $\sqrt[3]{A}$ е една од трите вредности на коренот, се сведува на равенка од вид $y^3 = 1$. Последната равенка напишана во вид $(y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$ овозможува да се добијат следните нејзини корени:

$$y_1 = 1 \, ; \, y_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \, ; \, y_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \, .$$

Лесно се покажува дека $y_3 = y_2^2$ . Ако ставиме $\alpha = y_2$, тогаш, во согласност со смената, корените на равенката $x^3 = A$ ќе бидат дадени со формулите

$$x_1=\sqrt[3]{A}\ ;\ x_2=\alpha\cdot\sqrt[3]{A}\ ;\ x_3=\alpha^2\cdot\sqrt[3]{A}\,.$$

Општата равенка од трет степен $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, $a_0 \neq 0$, со смената $y = \frac{a_1}{3a_0} + x$, се сведува на равенка од вид $y^3 + py + q = 0$, каде $p = -\frac{a_1^2}{3a_0^2} + \frac{a_2}{a_0}$, $q = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}$.

Понатаму ќе работиме со равенка од вид:

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (2)$$

Според методот на Худе, даден 1639 година, равенката (2) се решава на следниот начин:

Тргнуваме со смената $x = y + z$ , каде $y$ и $z$ се нови непознати. Од $x^3 = (y + z)^3 = y^3 + z^3 + 3yz(y + z)$ се добива $x^3 - 3yz(y + z) - (y^3+z^3) = 0$ или

$$x^3 - 3y\cdot z\cdot x - (y^3+z^3) = 0 \qquad (3)$$

Ако ги спoредиме коефициентите на равенките (2) и (3) добиваме $y^3 + z^3 = -q$ , $y \cdot z = -\frac{p}{3}$ или $y^3 \cdot z^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Ако замениме $y^3 = u_1$ , $z^3 = u_2$, ќе добиеме:

$$u_1 + u_2 = -q\ ,\ u_1\cdot u_2 = -\frac{p^3}{27} \qquad (4)$$

Според Виетовите правила равенствата (4) покажуваат дека $u_1$ и $u_2$ се корени на квадратната равенка $u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0$. Корените на оваа равенка се дадени со познатата формула

$$u_{1/2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,.$$

Во согласност со извршените смени $y = \sqrt[3]{u_1}$, $z = \sqrt[3]{u_2}$, сите решенија на равенката (2) ќе бидат дадени со формулата:

$$x = y + z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (5)$$

која во литературата се нарекува формула на Кардано.

Секој третти корен има три вредности во множеството на комплексните броеви, така што со формулата (5) е нормално да се очекува да се добијат девет вредности. Бидејќи $y$ и $z$, односно вредностите на корените, треба да го задоволуваат и условот $y \cdot z = -\frac{p}{3}$ сепак се добиваат само три вредности.

Нека A и B се вредности на двата трети корени $\sqrt[3]{u_1}$, $\sqrt[3]{u_2}$ од формулата (5), кои го задоволуваат условот $A \cdot B = -\frac{p}{3}$. Тогаш во согласност со формулите за корени на непотполната равенка од трет степен, решенијата на равенката (2) можат да се напишани во вид:

$$x_1 = A + B,\ x_2 = \alpha A + \alpha^2 B,\ x_3 = \alpha^2 A + \alpha B,$$

каде $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ е еден корен на равенката $w^2 + w + 1 = 0$, односно во вид:

$$x_1 = A + B,\ x_2 = -\frac{A+B}{2} + i\frac{A-B}{2}\sqrt{3},\ x_3 = -\frac{A+B}{2} - i\frac{A-B}{2}\sqrt{3} \qquad (6)$$

Нека со $\Delta$ го означиме изразот $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ и нека ги разгледаме следните три случаи:

$1^0$ Нека $\Delta > 0$. Тогаш за $A$ и $B$ можат да се земат реалните вредности на треттите корени и според формулите (6) равенката (2) ќе има еден реален корен и два коњугирано комплексни корени.

$2^0$ Нека $\Delta = 0$. Тогаш $A = B$ и за $A$ се зема реалната вредност на третиот корен. Според формулата (6) равенката (2) ќе има три реални корени од кои два се еднакви и тоа $x_1 = 2A$, $x_{2/3} = -\frac{A+B}{2} = -A$.

$3^0$ Нека $\Delta < 0$. Тогаш $A$ и $B$, како вредности од двата трети корени соодветно, се коњугирано комплексни броеви и според формулите (6) корените на равенката (2) ќе бидат од вид:
$x_1 = 2g$, $x_2 = -g - h\sqrt{3}$, $x_3 = -g + h\sqrt{3}$, каде што $A = g + ih$, $B = g - ih$.

Забележуваме дека во првите два случаја корените можат лесно да се изразат преку коефициентите на равенката (2), додека во третиот случај тоа не е непосредно возможно. Затоа за тој случај ќе дадеме решение изразено со тригонометриски запис на комплексен број.

Нека комплексниот број $-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta}$ го запишеме во тригонометриски запис $\rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$ каде $\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$, $\cos\varphi = -\frac{q}{2\rho}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}$. Според формулата (5) за решенијата на равенката (2) се добива формулата:

$$x=\sqrt[3]{\rho}\,\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right) + \sqrt[3]{\rho}\,\left(\cos\frac{\varphi+2k_1\pi}{3} - i\cdot\sin\frac{\varphi+2k_1\pi}{3}\right),$$

каде $k = 0,1,2$ и $k_1 = 0,1,2$.

Во согласност со условот $y\cdot z = -\frac{p}{3} \in R$, се добива $k = k_1$ и корените ќе бидат дадени со формулите:

$$x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi}{3},\ x_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi+2\pi}{3},\ x_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cdot\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} \quad (7)$$

Формулите (5) на Кардано даваат една сложена форма за добивање на корените на равенки од третти степен.

**Пример 1**. За равенката $x^3 + 3x - 14 = 0$, се добива $p = 3$, $q = -14$, $\Delta = 50 > 0$, и според формулата (5) $x = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$. Бидејќи $A = \sqrt[3]{7+\sqrt{50}} = 1 + \sqrt{2}$, $B = \sqrt[3]{7-\sqrt{50}} = 1 - \sqrt{2}$, според формулите (6) ќе имаме $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + i\sqrt{6}$, $x_3 = -1 - i\sqrt{6}$.

**Пример 2.** За равенката $x^3 - 3x - 1 = 0$, се добива $p = -3$, $q = -1$, $\Delta = -\frac{3}{4} < 0$, $-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\rho = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, и според формулите (7) ќе имаме $x_1 = 2\cos\frac{\pi}{9}$, $x_2 = 2\cos\frac{7\pi}{9}$, $x_3 = 2\cos\frac{13\pi}{9}$.

## Решавање на равенка од четврти степен

За решавање на равенка од четврти степен се познати повеќе методи. Методот на Ојлер е генерализација на методот на Худе според иста идеја, додека општиот метод на Лагранж ги обединува скоро сите методи. Овде за промена ќе го изложиме методот на Декарт.

Општата равенка $a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$, $a_0 \neq 0$, со смената $x = y - \frac{a_1}{4a_0}$, се сведува на равенка од вид $y^4 + py^2 + qy + r = 0$.

Нека е дадена равенката

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \qquad (1^*)$$

Нека равенката (1*) ја запишеме во вид

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ux + v)(x^2 - ux + v_1),$$

при што $v + v_1 - u^2 = p$, $u(v_1 - v) = q$, $v \cdot v_1 = r$, од каде $v + v_1 = p + u^2$, $v - v_1 = -\frac{q}{u}$, или $v = \frac{1}{2}(p + u^2 - \frac{q}{u})$, $v_1 = \frac{1}{2}(p + u^2 + \frac{q}{u})$.

Со замена во равенката $vv_1 = r$ се добива

$$(p + u^2 - \frac{q}{u})\,(p + u^2 + \frac{q}{u}) = 4r,$$

или $u^6 + 2pu^4 + (p^2 - 4r)u^2 - q^2 = 0$.

За $u^2 = y$ се добива таканаречената резолвентна равенка

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 - 4r)y - q^2 = 0. \qquad (2^*)$$

Значи со тоа решавањето на равенката (1*) се сведува на решавање на равенката (2*) од трет степен за која веќе ги добивме формулите за нејзините корени.

Ако (2*) се реши тогаш равенката (1*) се распаѓа на две квадратни равенки

$$x^2 + ux + \frac{1}{2}(p + u^2 - \frac{q}{u}) = 0$$

$$x^2 - ux + \frac{1}{2}(p + u^2 + \frac{q}{u}) = 0, \qquad (3^*)$$

од каде се добиваат формулите за корените на равенката (1*).

Ако $\alpha_1^2, \alpha_2^2$ и $\alpha_3^2$ се корените на равенката (2*), тогаш според виетовите формули за (2*) важи $\alpha_1^2\, \alpha_2^2\, \alpha_3^2 = q^2$.

Од (3*) може да се заклучи дека со замена на $u$ со $-u$ системот (3*) не се менува. Тоа значи дека можеме да коренуваме така што $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 = q$.

Нека $u = \alpha_1$. Од системот (3*) се добива

$$x_{1/2} = -\frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1^2 - 2p - 2\alpha_1^2 + \frac{2q}{\alpha_1}},$$

$$x_{3/4} = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha_1^2 - 2p - 2\alpha_1^2 - \frac{2q}{\alpha_1}}$$

или, согласно виетовите формули за равенката (2*)

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -2p,$$

$$x_{1/2} = \frac{-\alpha_1 \pm (\alpha_2 + \alpha_3)}{2}, \quad x_{3/4} = \frac{\alpha_1 \pm (\alpha_2 - \alpha_3)}{2}, \qquad (4^*)$$

Со тоа се добиени формулите за сите 4 корени на равенката (1*).

Интересна е обратната врска на корените на равенката (1*) и корените на равенката (2*):

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4),\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4),$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4).$$

Значи корените $y_1, y_2, y_3$ на равенката (2*) се трите вредности на рационалната функција

$$\frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$$

добиени со промени на корените на равенката (1*) на сите возможни начини.

На крај да ги проучиме корените на равенката (1*) во зависност од корените на равенката (2*). Бидејќи слободниот член на равенката (2*) е негативен, таа има секогаш барем еден позитивен корен кој ќе го означиме со $y_1 = \alpha_1^2$. Понатаму ќе ги разгледаме сите можни случаи:

1) Нека $y_1, y_2, y_3$ се позитивни и $y_1 = \alpha_1^2$, $y_2 = \alpha_2^2$ и $y_3 = \alpha_3^2$. Тогаш $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ се реални што значи според формулите (4*) дека сите корени на равенката (1*) се реални.

2) Нека $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, $y_3 < 0$. Тогаш $\alpha_2 = h\cdot i$, $\alpha_3 = k\cdot i$, при што $-\alpha_1 h\cdot k = q$ ( од $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 = q$). Значи корените на равенката (1*) согласно со формулите (4*), се добиваат со формулите:

$$x_{1/2} = \frac{-\alpha_1 \pm i(h+k)}{2},\ x_{3/4} = \frac{\alpha_1 \pm i(h-k)}{2}$$

Според тоа сите корени на равенката (1*) се комплексни. Само во специјален случај кога важи $h = \pm k$ т.е. кога $y_2 = y_3$ ($y_2 = \alpha_2^2$, $y_3 = \alpha_3^2$), равенката (1*) има двократен реален корен и два комплексни корени.

3) $y_1 > 0$, а $y_2$ и $y_3$ се комплексни корени т.е. $\alpha_2 = \alpha + i\beta$, $\alpha_3 = \alpha - i\beta$. Бидејќи $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 = \alpha_1(\alpha^2 + \beta^2) = q$, земаме $\alpha_1 > 0$ ако $q > 0$ и $\alpha_1 < 0$ ако $q < 0$. Тогаш

$$x_{1/2} = -\frac{\alpha_1}{2} \pm \alpha\ ,\ x_{3/4} = \frac{\alpha_1}{2} \pm i\beta$$

што значи равенката (1*) има два реални и два коњугирано комплексни корени.

Во некоја литература како куриозитет се наведува дека Cardano дознал на некој начин за формулата од Tartaglia и ја публикувал како своја. Истото се случило и со формулата за корените на равенка од четврти степен , која ја нашол неговиот студент Ferrari . Денес и двете формули се познати како формули на Cardano .

На крај да забележиме дека за произволна равенка од степен $n > 4$ не постои општа формула со помош на која ќе бидат најдени сите корени со конечен број операции собирање одземање, множење, делење и коренување со коренов показател природен број, од нејзините коефициенти. Тоа тврдење во 1826 година го докажал големиот математичар Абел. Некомплетен доказ на тврдењето за прв пат бил публикуван 1799 година од страна на Руфини кој по професија бил лекар. Подоцна еден од најголемите математичари Галуа (1811 – 1832), преку неговата теорија го разрешил и проблемот како да се состави конкретна равенка со степен $n > 4$ која е нерешлива т.е. за која не може да се најде формула со помош на која ќе бидат најдени сите корени со конечен број операции собирање одземање, множење, делење и коренување со коренов показател природен број , од нејзините коефициенти. Една така конструирана равенка која е алгебарски нерешлива е равенката:

$$x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 2 = 0.$$