# ВОЛУМЕН И ПЛОШТИНА КАКО БРОЈНИ КАРАКТЕРИСТИКИ НА $n$ - ДИМЕНЗИОНАЛНА ТОПКА

Во оваа тема генерално ќе бидат обработени следните поими:

- вектор, радиус вектор, димензија
- должина, растојание, $n$ – димензионална топка
- волумен и плоштина на $n$ – димензионална топка, определен интеграл

Некои од нив се добро познати од содржините предвидени со програмата за средно образование. Воведувањето на новите поими како што се димензија, $n$–димензионална топка ќе бидат воведени на педагошки оправдан но затоа помалку строг математички прецизен начин.

## Вектор, радиус вектор , димензија

Според геометриската дефиниција.вектор е ориентирана отсечка.

Нека е дадена бројна оска дефинирана со фиксна точка О и единичен радиус вектор $\vec{e}$ (вектор со должина 1 чиј почеток е во точката О). Со краевите на сите вектори $\lambda\vec{e}$, $\lambda \in R$, се добиваат сите точки од бројната права . Според тоа ако $\vec{a}$ е радиус вектор на било која точка од бројната права тогаш сигурно постои скалар $\lambda$ (реален број) така што $\vec{a} = \lambda\vec{e}$. Поради тој факт велиме дека правата има димензија 1 и тоа множество точки ќе го наречеме еднодимензионален простор.

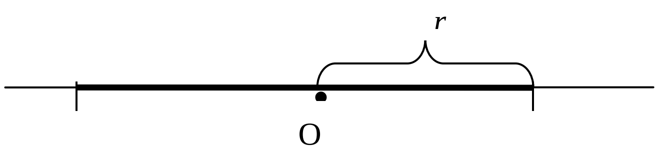
Нека сега се дадени фиксна точка О и **два** единични радиус вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ со ист почеток во О, такви што $\vec{e}_1 \neq \lambda\vec{e}_2$ за секој реален број $\lambda \neq 0$. Множеството точки како крајни точки од сите радиус вектори добиени со линеарна комбинација $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$ каде $\lambda_1$, $\lambda_2 \in R$, ќе го наречеме рамнина и во тој случај соодветната бројна карактеристика е димензијата 2. Значи рамнината како множество точки е 2– димензионален простор.

На ист начин со **три** единични радиус вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, со заеднички почеток О, за кои се знае дека, $\vec{e}_1 \neq \lambda\vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \neq \lambda\vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \neq \lambda\vec{e}_3$, за секој реален број $\lambda \neq 0$, се доаѓа до вистинскиот реален геометриски простор како тридимензионален кој има димензија 3. Можеме да продолжиме на ист начин и понатаму и да добиваме апстрактни простори со димензии 4, 5, ..., n, при што ќе ни биде потребно и воведување на нови поими линеарна комбинација и линеарна зависност и независност на вектори. При тоа природно се напушта и геометриската дефиниција на вектор со воведување на алгебарска структура векторски простор. Димензијата е една од бројните карактеристики на векторскиот простор и може да биде само природен број во смисол на погорната дефиниција.

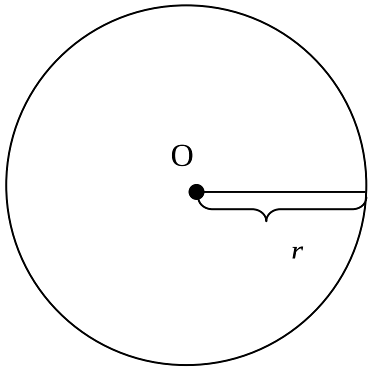
### Должина, растојание, $n$ – димензионална топка

Растојанието меѓу две точки како и должината на отсечка се исто така геометриски бројни карактеристики за кои например во даден Декартов правоаголен координатен систем се познати и формулите за нивно пресметување.

Нека е дадена бројна права со фиксна точка О и број $r>0$, $r \in R$. Множеството точки од бројната права кои се на растојание помало или еднакво на $r$ од точката О ќе го наречеме еднодимензионална топка со центар во О и радиус $r$. Еднодимензионална топка геометриски е всушност отсечка.




Дводимензионална топка со центар во фиксна точка О и радиус $r > 0$ е подмножество точки од дводимензионален простор (геометриски рамнина) кои се на растојание помало или еднакво на $r$ од точката О. Дводимензионална топка геометриски е всушност круг.




Тродимензионална топка со центар во фиксна точка О и радиус $r > 0$ е подмножество точки од тридимензионален простор (геометриски реалниот простор) кои се на растојание помало или еднакво на $r$ од точката О. Тродимензионална топка геометриски е всушност реална топка.

Во 4–димензионалниот простор за дефиниција на 4–димензионална топка е потребно повторно една фиксна точка О (центар на топката) и радиус $r > 0$. Не е тешко да се продолжи и за $n > 4$, при што $n$-димензионалната топка во тие случаи ќе нема своја геометриска интерпретација односно претставување.

## Волумен и плоштина на $n$ – димензионална топка, определен интеграл

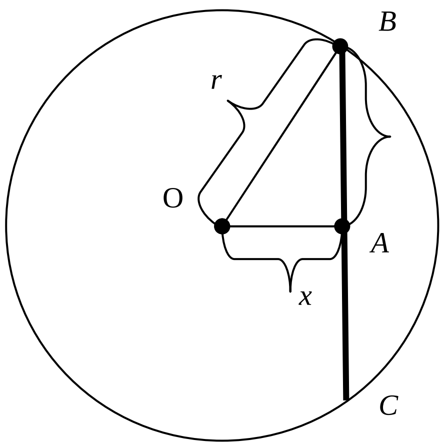
Да се вратиме на еднодимензионалната топка со радиус $r$ т.е. геометриски на отсечка со должина $2r$. Нејзината должина како бројна карактеристика за тоа множество точки ќе ја дефинираме како нејзин волумен. Значи $V_1(r) = 2r$.

За дводимензионална топка со радиус $r$ ќе дефинираме нејзин волумен со бројната карактеристика за круг, плоштина на круг. Значи $V_2(r) = r^2\pi$.

За тродимензионалната топка со радиус $r$ ќе дефинираме нејзин волумен со бројната карактеристика за геометриски волумен на топка. Значи $V_3(r) = \frac{4}{3}r^3\pi$.

Забележуваме дека во формулата за така дефинираните волумени учествува степен на радиусот $r$ помножен со некој број, при што степеновиот показател е еднаков на димензијата на просторот во кој се разгледува топката. Според тоа можеме да претпоставиме дека формулата за волуменот на $n$–димензионална топка со радиус $r$ ќе биде од вид $V_n(r) = C_n r^n$ . Специјално $C_1 = 2$, $C_2 = \pi$, $C_3 = \frac{4}{3}\pi$.

За определување на броевите $C_n$ ќе го употребиме определениот интеграл. Нека е дадена дводимензионална топка (круг) со центар во О и радиус $r$ и нека го пресечеме со отсечка $BC$ со крајни точки од кружницата (тетива) чие нормално растојание од центарот О е еднакво на $x$. Очигледно растојанието $x = \overline{OA}$ може да биде најмногу $r$. Ако $\overline{AB} = \rho$ ,тогаш волуменот на еднодимензионалната топка со центар во точката $A$ и радиус $\rho$ (отсечката $BC$) ќе биде $V_1(\rho) = C_1\rho$.

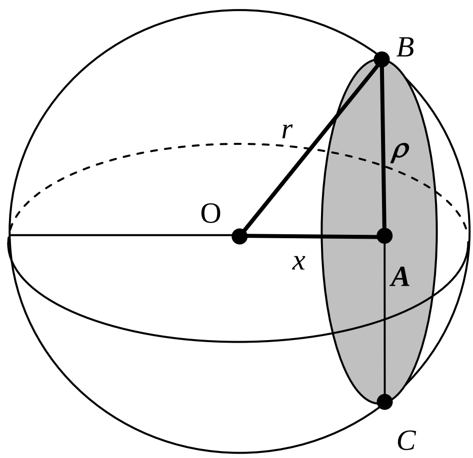



Од правоаголниот триаголник $OAB$ се добива $\rho = \sqrt{r^2 - x^2}$ и со $V_1(x) = C_1\sqrt{r^2 - x^2}$ можеме да дефинираме функција од $x$ на сегментот $[-r, r]$. За да го опфатиме целиот круг со такви отсечки оваа функција ќе биде дефинирана на сегментот $[-r, r]$. Тогаш определениот интеграл $\int_{-r}^{r} V_1(x)dx$ ќе го наречеме волумен на дводимензионалната топка. Значи $V_2(r) = \int_{-r}^{r} V_1(x)dx$

$= \int_{-r}^{r} C_1\sqrt{r^2 - x^2}dx$. Определениот интеграл се решава со смена

$x = r\cos\varphi$ и се добива $V_2(r) = C_1 r^2 \frac{\pi}{2}$. Значи $C_2 = C_1 \frac{\pi}{2}$. Бидејќи знаеме дека $C_1 = 2$, се добива $C_2 = \pi$ па значи и $V_2(r) = \pi r^2$ која е иста со познатата формула за плоштина на круг.

За тродимензионална топка со центар во точката O и радиус $r$ според истата постапка се користи пресек круг чие нормално растојание од центарот O е еднакво на $x$. Очигледно растојанието $x = \overline{OA}$ може да биде најмногу $r$. Ако $\overline{AB} = \rho$ ,тогаш волуменот на дводимензионалната топка со центар во точката *A* и радиус $\rho$ (геометриски круг со центар во *A* и радиус $\rho$) ќе биде $V_2(\rho) = C_2\rho^2$ .




Од правоаголниот триаголник $OAB$ се добива $\rho = \sqrt{r^2 - x^2}$ и со $V_2(x) = C_2 (r^2 - x^2)$ се дефинира функција од x на сегментот $[-r, r]$ поради истите причини. Тогаш определениот интеграл $\int_{-r}^{r} V_2(x)dx$ ќе го наречеме волумен на тродимензионалната

топка. Значи $V_3(r) = \int_{-r}^{r} V_2(x)dx = \int_{-r}^{r} C_2(r^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}C_2 r^3$. Значи

$C_3 = \frac{4}{3} C_2$ . Бидејќи знаеме дека $C_2 = \pi$, се добива $C_3 = \frac{4}{3}\pi$ па значи и $V_3(r) = \frac{4}{3}\pi\, r^3$ која е иста со познатата формула за волумен на топка.

Интересен е случајот за четиридимензионална топка кај која не можеме геометриски да ја илустрираме истата постапка. Сепак за четиридимензионална топка со центар во точката О и радиус $r$ според истата постапка со пресек топка (тридимензионална) чие нормално растојание од центарот О е еднакво на $x$, се добива правоаголен триаголник. Ако радиусот на тридимензионалната топка е $\rho$ ,тогаш нејзиниот волумен ќе биде $V_3(\rho) = C_3\,\rho^3$ . Бидејќи и овде $\rho = \sqrt{r^2 - x^2}$ , се добива $V_3(x) = C_3(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$, па определениот интеграл $\int_{-r}^{r} V_3(x)dx$ ќе го наречеме волумен на четиридимензионалната топка. Значи $V_4(r) = \int_{-r}^{r} V_3(x)dx = \int_{-r}^{r} C_3(r^2 - x^2)^{\frac{3}{4}} dx = \frac{3}{8}\pi\, C_3\, r^4$ . Според тоа $C_4 = \frac{3}{8}\pi\, C_3$ . Бидејќи знаеме дека $C_3 = \frac{4}{3}\pi$ , се добива $C_4 = \frac{1}{2}\pi^2$ па значи и $V_4(r) = \frac{1}{2}\pi^2 r^4$ .

Користејќи ја оваа постапка и за $n$–димензионална топка со радиус $r$ со пресеци со $(n–1)$–димензионални топки со радиуси $\rho$ и со волумени $V_{n-1}(\rho) = C_{n-1}\,\rho^{n-1}$, се добива $\rho = \sqrt{r^2 - x^2}$ и функција $V_{n-1}(x) = C_{n-1}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^{n-1} = C_{n-1}(r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}}$ дефинирана на сегментот $[-r, r]$. Волуменот $V_n(r)$ на $n$ –димензионалната топка со радиус $r$ ќе го дефинираме со определениот интеграл $\int_{-r}^{r} V_{n-1}(x)dx = \int_{-r}^{r} C_{n-1}\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx$. Овој интеграл со смена $x = r\cos\varphi$ се трансформира во интегралот

$2C_{n\text{-}1}\, r^{\,n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \, d\varphi$. Со тоа се добива и рекурентната врска за определување на броевите $C_n = 2C_{n\text{-}1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi \, d\varphi$.

Општата формула за волумен на $n$ – димензионална топка со радиус $r$ може да се изрази со помош на една специјална функција наречена Гама функција со ознака Γ($x$). Значи

$$V_n(r) = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} r^n .$$

Гама функцијата има неколку едноставни особини со помош на кои може лесно да се пресмета соодветниот волумен. Овде ќе ги наведеме без доказ.

$\Gamma(n) = (n-1)!$, $\Gamma(1+a) = a\,\Gamma(a)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!}{2^n}\sqrt{\pi}$, $n \in N$.

Пример: Да се најде волумен на 100–димензионална и 101–димензионална топка.

Со користење на формулата и особините за гама функцијата се добива: $V_{100}(r) = \pi^{50} \frac{1}{\Gamma(51)} r^{100} = \pi^{50} \frac{1}{51!} r^{100}$.

$$V_{101}(r) = \pi^{\frac{101}{2}} \frac{1}{\Gamma(1+\frac{101}{2})} r^{101} = \pi^{50+\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(51+\frac{1}{2})} r^{101} =$$

$$\pi^{50}\sqrt{\pi}\, \frac{1}{\frac{101!}{2^{51}}\sqrt{\pi}}\; r^{101} = \pi^{50} \frac{2^{51}}{101!} r^{101} .$$

Сега ќе воведеме нова бројна карактеристика $P_n(r)$ наречена плоштина на $n$ – димензионална топка со радиус $r$.
За $n = 1$ ќе дефинираме $P_1(r) = 2$ како плоштина на еднодимензионална топка (отсечка) бидејќи отсечката има две крајни точки кои образуваат конечно множество чија што бројна карактеристика и ја разгледуваме (број на елементи од едно множество).

За $n = 2$ ќе дефинираме $P_2(r) = 2\pi r$ како плоштина на дводимензионална топка (круг) бидејќи кругот има кружница чија што бројна карактеристика и ја разгледуваме (должина на кружница).
За $n = 3$ се добива геометриски топка и $P_3(r) = 4\pi r^2$ како плоштина на топка ќе биде по дефиниција и геометриски плоштина на тродимензионална топка.

И во овој случај забележуваме дека општата формула за плоштина на $n$ – димензионална топка со радиус $r$ може да се напише во вид $P_n(r) = C_n r^{n-1}$.
Нека ги компарираме (споредиме) овие две бројни карактеристики плоштината и волуменот на $n$ – димензионална топка со радиус $r$. Ако се потсетиме дека волуменот на тродимензионална топка се добива со операцијата интегрирање на функции кои како волумен на дводимензионални топки се всушност геометриски плоштини на кругови, а волумен на дводимензионална топка се добива со операцијата интергирање на функции кои како волумен на еднодимензионални топки се всушност должини на отсечки (криви), логички доаѓаме до заклучокот дека со инверзна операција на интегрирањето може да се добие бројната карактеристика наречена плоштина на $n$ – димензионална топка со радиус $r$.

Бидејќи инверзна операција на интегрирање е диференцирањето ќе ја добиеме врската $P_n(r) = V_n'(r)$, каде диференцираме во однос на променливата $r$. Значи $P_1(r) = V_1'(r) = 2$, $P_2(r) = V_2'(r) = 2\pi r$, $P_3(r) = V_3'(r) = 4\pi r^2$. Според тоа општата формула за така дефинираната бројна карактеристика на $n$ – димензионална топка со радиус $r$, наречена плоштина, ќе биде

$$P_n(r) = V_n'(r) = n\,\pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} r^{n-1}.$$

Пример: Да се најде плоштина на четиридимензионална и 100–димензионална топка.
Со користење на формулата и особините за гама функцијата се добива:

$$P_4(r) = 2\pi^2 r^3,\quad P_{100}(r) = 100\pi^{50}\frac{1}{51!} r^{99}.$$